Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag, 2.12.2008**.

Aufgabe 1. (Symmetrische Tridiagonalmatrizen)

Es sei $\mathbf{D}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Tridiagonalmatrix, das heisst

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ 0 & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich das charakteristiche Polynom $p_n(\lambda) = \det(\mathbf{D}_n - \lambda\mathbf{I})$ rekursiv gemäß

$$p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda, \qquad p_k(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - \beta_k^2 p_{k-2}(\lambda), \qquad k > 1,$$

berechnen lässt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Tridiangonalmatrizen)

Es sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte λ_k von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\mathrm{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

und die Einträge $[v_k]_\ell$ für $\ell = 1, \ldots, n$ der zughörigen Eigenvektoren

$$[v_k]_\ell = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} \sin\left(\frac{k\ell\pi}{n+1}\right)$$

erfüllen.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Kondition des diskreten Laplace-Operators)

Das Gleichungssystem

$$h^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(h) \\ u(2h) \\ \vdots \\ u((n-1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ \vdots \\ f((n-1)h) \end{bmatrix}.$$

entsteht beispielsweise bei der Diskretisierung der Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

mit zentralen Differenzenquotionten zweiter Ordnung, das heisst

$$u''(kh) \approx \frac{u((k-1)h) - 2u(kh) + u((k+1)h)}{h^2}, \qquad h := 1/n.$$

Berechnen Sie die ℓ^2-Kondition der Systemmatrix.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Eigenwerteinschließung)

Vorgelegt sei die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie mit Hilfe der Sätze von Gerschgorin (angewandt auf $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$) und Bendixson eine möglichst kleine Menge an, welche das Spektrum von $\mathbf{A}$ enthält. Skizzieren Sie diese Mengen in der komplexen Ebene.

(10 Punkte)