Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 09.12.2008**.

Aufgabe 1. (Potenzmethode)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Folge der Iterierten $(\mathbf{q}_k, \lambda_k)$ der Potenzmethode (Power-Iteration) im Falle des Startvektors $\mathbf{q}_0 = [-1, 1, 3]^T$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Berechnen Sie explizit den Fehler der Näherung $\lambda_k = \mathbf{q}_k^T \mathbf{A} \mathbf{q}_k$ an den betragsgrößten Eigenwert von $\mathbf{A}$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Hebden-Verfahren)

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit (eindeutiger) Nullstelle $\hat{x} \in I$. Zeigen Sie, dass dann das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \in I$ mit $x_0 \le \hat{x}$ monoton gegen $\hat{x}$ konvergiert.

2. Betrachten Sie Gleichung

$$r(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2} = \rho$$

mit z_i und d_i positiv für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\rho > 0$. Ferner gelte $d_i > d_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und $r(0) > \rho$. Zur Lösung obiger Gleichung mit dem Hebden-Verfahren wird das Newton-Verfahren auf die umgeformte Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 0$$

angewendet. Zeigen Sie, dass das Hebden-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ konvergiert.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Reduktion auf Hessenberg-Form)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie eine orthogonale Transformation $\mathbf{Q}$, so dass die Matrix $\mathbf{Q}^\star\mathbf{A}\mathbf{Q}$ eine Tridiagonalmatrix ist.
Hinweis. Konstruieren Sie $\mathbf{Q}$ als Produkt von geeigneten Householder-Spiegelungen.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Orthonormalpolynome)

Es sein $\{p_k\}_{k\geq 0}$ eine Folge reeller Orthonormalpolynome mit der dreigliedrigen Rekursionsformel

$$xp_k(x) = a_k p_{k-1}(x) + b_k p_k(x) + a_{k+1} p_{k+1}(x), \quad k \geq 0$$

und den Definitionen $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, und $a_k > 0$. Zeigen Sie, dass die Nullstellen von p_k genau den Eigenwerten der Tridiagonalmatrix

$$\mathbf{T}_k := \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-2} & b_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & & & a_{k-1} & b_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 1$$

entsprechen. Wie sehen die entsprechenden Eigenvektoren aus?

(10 Punkte)