Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 16.12.2008**.

Aufgabe 1. (Kondition des Eigenwertproblems)

Vorgelegt sei die Matrix

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon\cos(2/\varepsilon) & -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) \\ -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) & 1-\varepsilon\cos(2/\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}_\varepsilon$. Untersuchen Sie den Grenzfall $\varepsilon \to 0$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Allgemeines Eigenwertproblem)

1. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ symmetrische Matrizen und $\mathbf{B}$ zusätzlich positiv definit. Zeigen Sie, dass das allgemeine Eigenwertproblem

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$$

   auf ein äquivalentes Eigenwertproblem

$$\mathbf{Cx} = \lambda\mathbf{x}$$

   mit eine symmetrischen Matrix $\mathbf{C}$ zurückgeführt werden kann.

2. Bestimmen Sie zu

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   die entsprechende Matrix $\mathbf{C}$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Programmieraufgabe)

Abgabe innerhalb der Woche 5.1.–9.1.2008 im CIP-Pool!

Gegeben sei eine symmetrische Tridiagonalmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Implementieren Sie den QR-Algorithmus zur Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Die dabei auftretenden orthogonalen Transformationen sind sinnvollerweise mit Givens-Rotationen durchzuführen. Das Programm soll 20 Iterationen ausführen und nach jeweils 5 Iterationen die Näherungen für die Eigenwerte ausgeben.

Testen Sie Ihr Programm an den beiden Beispielen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & & & & \\ 9 & 2 & 8 & & & \\ & 8 & 3 & 7 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 9 & 1 \\ & & & & 1 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}.$$