Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 6.1.2009**.

Aufgabe 1. (Reduktion auf Tridiagonalmatrix)

Vorgelegt sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verwenden Sie das Verfahren von Householder um die Matrix $\mathbf{A}$ in eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{H} = \mathbf{Q}^\star\mathbf{A}\mathbf{Q}$ überzuführen.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Rayleigh-Quotient)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Zu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist der Rayleigh-Quotient $\rho(\mathbf{x})$ durch $\rho(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/(\mathbf{x}^T\mathbf{x})$ definiert. Dieser taucht in der Potenzmethode in $\lambda^{(k)} = \rho(\mathbf{x}^{(k)})$ bei der Approximation des dominanten Eigenwerts auf.

1. Zeigen Sie, dass der Rayleigh-Quotient $\rho(\mathbf{x})$ die Eigenwert-Gleichung im folgenden Sinne am besten annähert

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}\|_2 = \min_{\mu\in\mathbb{R}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}\|_2.$$

2. Sei λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ zum Eigenvektor $\mathbf{v}$ mit $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$|\lambda - \rho(\mathbf{x})| \le C\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\mathbf{x}\|_2 = 1.$$

Hinweis: $C = 2\|\mathbf{A}\|_2$.

3. Sei $\mathbf{A}$ symmetrisch und λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ zum Eigenvektor $\mathbf{v}$ mit $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$|\lambda - \rho(\mathbf{x})| \le C\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|_2^2 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\mathbf{x}\|_2 = 1.$$

Hinweis: $C = \max\{|\lambda - \tilde\lambda| : \tilde\lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Quadratwurzel einer Matrix)

Gegeben sei eine symmetrische und positive definite Matrix $\mathbf{A}$. Eine Matrix $\mathbf{X}$ heißt dann Quadratwurzel von $\mathbf{A}$, falls $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass es genau eine positiv definite Quadratwurzel von $\mathbf{A}$ gibt.
2. Bestimmen Sie für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

diese positiv definite Quadratwurzel.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Mehrfache Eigenwerte bei der Potenzmethode)

Mit der Potenzmethode soll der betragsgrößte Eigenwert einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmt werden. Untersuchen Sie im folgenden, was passiert, wenn dessen Vielfachheit größer als 1 ist.

1. Der eindeutige, betragsgrößte Eigenwert λ habe die algebraische und geometrische Vielfachheit $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass die direkte Vektoriteration für fast alle Startvektoren konvergiert. Gegen welchen Vektor konvergiert sie?
2. Die Matrix $\mathbf{A}$ habe die Gestalt eines Jordan-Kästchens

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Potenzmethode für fast alle Startvektoren gegen den Eigenvektor konvergiert. Was kann man über die Konvergenzgeschwindigkeit sagen?

3. Für $b \neq 0$ besitzt die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

zwei komplex konjugierte, betragsgrößte Eigenwerte $a \pm bi$. Zeigen Sie, dass die Potenzmethode für fast alle Startvektoren divergiert.

4. Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 3 & 1 \\ & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ist symmetrisch und hat daher nur reelle Eigenwerte. Begründen Sie, warum die Potenzmethode für fast alle Startvektoren divergiert.

(10 Punkte)

Wir wünschen allen Teilnehmern
Frohe Weihnachten
und
ein erfolgreiches Jahr 2009!