



Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer



Übungsblatt X.

Abgabe am **Dienstag, 6.1.2009.**

Aufgabe 1. (*QR*-Zerlegung)

Bestimmen Sie die *QR*-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Least-Squares-Problem)

Zu den Daten

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	0
y_i	1	2	3	4

bestimme man eine Parabel $p(x) = a + bx + cx^2$ derart, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^4 (p(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenwerte)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die stationären Punkte der Optimierungsaufgabe

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \rightarrow \min \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 1$$

genau die Eigenvektoren von \mathbf{A} sind. Wie sieht der zugehörige Lagrange-Multiplikator aus?

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Least-Squares-Problem mit Nebenbedingungen)

Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{C}^{p \times n}$ mit $p < n < m + p$ und beide Matrizen haben vollen Rang. Ferner sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$. Betrachten Sie das restringierte lineare Ausgleichsproblem

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \rightarrow \min \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ die entsprechenden Blockkomponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

sind.

Hinweis. Verwenden Sie die Lagrange-Multiplikatorenregel.

(10 Punkte)

Die Abgabe dieses Übungsblattes ist freiwillig. Erzielte Punkte können in einem beliebigen Block angerechnet werden.

**Wir wünschen allen Teilnehmern
Frohe Weihnachten
und
ein erfolgreiches Jahr 2009!**