Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 10.

Abgabe am **25.06. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Fourierkoeffizienten und Fourierreihen)

Wir bezeichnen mit a_k und b_k die reellen Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0 \,,$$

und

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \quad , \quad k \in \mathbb{N} \,.$$

Wir wissen: Ist die Funktion f Lipschitz-stetig, so konvergiert die zugehörige Fourierreihe punktweise, d.h.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

a. Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von $f(x) = |x|$.

b. Berechnen Sie den exakten Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

unter Benutzung von a).

(3 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 2. (Gleichmäßige Konvergenz der trigonometrischen Interpolation)

Wir bezeichnen mit f_k die komplexen Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \,.$$

Die Funktion f gehöre zur Wieneralgebra $\mathcal{A}$, d.h.

$$f \in \mathcal{A} := \left\{ f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(ik\cdot) \ : \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty \right\},$$

sie hat also eine absolut konvergente Fourierreihe.

a. Zeigen Sie die folgende Formel für die Koeffizienten t_k des Interpolationspolynoms aus Aufgabe 9.2 für eine Funktion $f \in \mathcal{A}$

$$t_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k+m(2n+1)} \quad , \quad |k| \le n \,.$$

b. Benutzen Sie Teil a), um zu zeigen, dass für jedes $f \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - I_n f\|_\infty = 0$$

gilt (Bezeichnung aus Aufgabe 9.2). Dabei ist $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $[0, 2\pi]$. Die interpolierenden trigonometrischen Polynome $I_n f$ konvergieren also gleichmäßig gegen f.

(3 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenschaften der B-Splines)

Wir betrachten die B-splines B_m, $m = 0, 1, 2, ...$, aus der Vorlesung. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

- Die Funktionen B_m sind $m-1$-mal stetig differenzierbar für $m \in \mathbb{N}$. Im Falle $m = 1$ ist die Funktion "nur" stetig.
- Es gilt für alle $m = 0, 1, 2, ...$ die Identität

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_m(\cdot - k) \equiv 1\,.$$

- Es gilt für alle m

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_m(x)\,dx = 1\,.$$

(1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 4. (Kubische Splines)

Man berechne die Koeffizienten des kubischen Splines

$$s : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad s(x) = \sum_{j=-1}^{3} \alpha_j B_3(x - j),$$

durch die Stützpunkte

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$s(x_i)$	1	5	1

mit den natürlichen Randbedingungen $s''(0) = s''(2) = 0$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Diskrete und schnelle Fouriertransformation)

Bearbeiten Sie die fünfte Programmieraufgabe, die als Jupyter Notebook auf der Webseite zur Verfügung steht.

$(2 + 2 + 2 + 2 + 2 * 2 = 12$ Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 25.06. bepunktet.

Am 21.06. ab 22:00 findet die Fachschaft-Mathe$_\varepsilon\sqrt{\textbf{Party}}$ in der N8schicht statt.