Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 13.

Abgabe am **16.07. vor der Vorlesung**.

Mit $\rho(M)$ bezeichnen wir im Folgenden den Spektralradius einer Matrix M.

Aufgabe 1. (Konstruktion von Iterationsverfahren)

Sei $A = M - N$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix A, derart, dass auch N symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren gegeben durch die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

konvergiert.

Hinweis: Bestimmen Sie den Spektralradius der Iterationsmatrizen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Jacobi-/Gauss-Seidel-Verfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Man gebe die entsprechenden Iterationsmatrizen für das Jacobi- bzw. Gauss-Seidel-Verfahren an.

b. Konvergieren das Jacobi- bzw. Gauss-Seidel-Verfahren?

   Hinweis: Eigenwerte/Spektralradius der Iterationsmatrizen.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Jacobi-Verfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2.5 & -1 \\ 0 & 0.5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Warum ist sofort klar, dass Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren konvergieren? Wie viele Iterationen sind beim Jacobi-Verfahren ca. nötig um eine weitere richtige Dezimalstelle im Ergebnis zu erhalten?

(1+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Richardson-Verfahren)

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitze nur positive Eigenwerte. Der kleinste und der größte Eigenwert von A seien mit λ_{min} und λ_{max} bezeichnet.

a. Zeigen Sie, dass das Richardson-Verfahren

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \vartheta\left(Ax^{(m)} - b\right)$$

zum Gleichungssystem $Ax = b$ für reelle Parameter ϑ genau dann konvergiert, wenn

$$0 < \vartheta < \frac{2}{\lambda_{\text{max}}}.$$

b. Zeigen Sie weiterhin, dass die optimale Konvergenzrate für

$$\vartheta_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}}} \qquad \text{mit} \qquad \rho(M_{\vartheta_{\text{opt}}}) = \frac{\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}}{\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}}}$$

erreicht wird, wobei M_ϑ die Iterationsmatrix zum Parameter ϑ bezeichnet.

(3+2 Punkte)

Aufgabe 5. (Newton-Verfahren)

Die Minimierungsaufgabe

$$f(u,v) = u(1+u) + v^4 + uv \to \min, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

soll mit Hilfe des Newton-Verfahren gelöst werden: Wie in der Vorlesung besprochen kann das Newton-Verfahren verwendet werden um eine Lösung der Gleichung $\nabla f(u,v) = 0$ anzunähern.

Erstellen Sie die Iterationsvorschrift und führen Sie ausgehend von $(u^{(0)}, v^{(0)}) = (1,1)$ einen Iterationsschritt durch.

(3 Punkte)