Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 4.

Abgabe am **07.05. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Erwartungswert von positiven, ganzzahligen Zufallsgrößen)

a. Es sei T eine Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass stets

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq k)$$

gilt.

b. Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

($2 + 2 = 4$ Punkte)

Aufgabe 2. (Zufällige Bitfolgen)

In manchen Anwendungen möchte man testen, ob eine Bitfolge

$$\omega = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$$

"zufällig" zustande kam oder nicht. Eine Kenngröße, mit der man quantifizieren kann, ob die Nullen und Einsen sehr gleichmäßig verteilt sind oder eher in wenigen Gruppen (Runs) vorkommen, ist die Zahl

$$V(\omega) := |\{i \in \{1, ..., n-1\} : x_i \neq x_{i+1}\}| \,.$$

Beispielsweise ist $V((1,1,1,1,0,0,0,0)) = 1$ und $V((1,0,1,0,1,0,1,0)) = 7$.

a. Es sei P die Gleichverteilung auf $\{0,1\}^n$. Wir betrachten die Verteilung der Zufallsgröße V. Welches Verteilungsgesetz (mit welchen Parametern) versteckt sich hier?

b. Bestimmen Sie $V(\omega)$ für 3 handgenerierte Beispielbitfolgen (Länge $n = 50$ und 3 computergenerierte Bitfolgen mittels Python. Wie könnte man beurteilen (testen), ob eine gegebene "möglichst" zufällige Bitfolge hinsichtlich der Anzahl der Runs echten Zufallsfolgen ähnlich sind?

($3 + 2 = 5$ Punkte)

Aufgabe 3. (Stichproben mit und ohne Zurücklegen)

Eine Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit "ja" oder "nein" zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

a. Ein/e Student/in kreuzt auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er/sie die Prüfung ?

b. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er/sie 2 Fragen mit Sicherheit beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?

c. Falls sie/er garnichts weiß, wäre es dann für sie/ihn günstiger, zufällig sechsmal “ja” und sechsmal “nein” anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für **genau** 6 Fragen die richtige Antwort “ja” lautet?

$(2 + 2 + 2 = 6$ Punkte$)$

Aufgabe 4. (Geburten)

Im 18. Jahrhundert wurden in London in 82 aufeinanderfolgenden Jahren mehr Jungen als Mädchen geboren. Da Jungen und Mädchen mit ungefähr (aber nicht genau) gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, scheint das ein sehr unwahrscheinliches Ereignis zu sein, das der göttlichen Vorsehung zugeschrieben wurde. Ist das wirklich so? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass jede Geburt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.485$ ein Mädchen ergibt (und vernachlässigen Sie die Möglichkeit von Zwillingen usw.).

a. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in $2n$ Geburten mehr Mädchen als Jungen geboren werden, ist nicht größer als

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1-p}{1-2p}$$

b. Angenommen, in 82 aufeinander folgenden Jahren werden jedes Jahr 20.000 Kinder geboren. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren werden, ist mindesten 0.99.
Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingformel

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \leq e^{1/(12n)}\,.$$

$(3 + 2 = 5$ Punkte$)$

Programmieraufgabe 1. (Lotto + Würfeln)

Bearbeiten Sie die Programmieraufgabe 2. Diese ist in einem Jupyter Notebook gestellt, das man sich von der Webseite herunterladen kann.

a. Im ersten Teil soll das klassische Zahlenlotto simuliert werden (5 Punkte).

b. Im zweiten Teil (Würfeln) geht es um die Anzahl von Sechsen in einer Sequenz von 100 Würfen mit einem idealen Würfel (5 Punkte).

$(5 + 5 = 10$ Punkte$)$

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 07.05. bepunktet.