Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 6.

Abgabe am **28.05. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Anlasslose Massenüberwachung)

Eine Behörde überwacht mit Hilfe einer Software die unverschlüsselte E-Mail-Kommunikation deutscher Internetnutzer/innen. Die Software, die E-Mails auf eine Reihe von Schlüsselbegriffen und Phrasen filtert, die auf illegale und / oder terroristische Aktivitäten hinweisen könnten, stuft eine tatsächlich sicherheitsrelevante Kommunikation mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit von 99.5% als potentielle Bedrohung ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine harmlose E-Mail fälschlicherweise als potentielle Bedrohung klassifiziert wird, liegt dagegen nur bei 0.5%. In Deutschland gibt es 71.000.000 Internetnutzer/innen. Nachfolgend gehen wir davon aus,

- dass jeder Nutzer täglich 10 unverschlüsselte Mails verschickt, die von der Software gesichtet werden,
- dass 10.000 Nutzer das Internet für die Vorbereitung illegaler oder terroristischer Aktivitäten nutzen,
- und dass jede vierte Mail, die von einem dieser 10.000 Nutzer verschickt wird, einen auffindbaren Hinweis auf eine solche Aktivität enthält.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine an einem beliebigen Tag durch die (Bedrohungen zu 99,5% korrekt klassifizierende) Software als potentielle Bedrohung eingestufte E-Mail auch tatsächlich auf eine reale Bedrohungslage hinweist?

(2 Punkte)

Aufgabe 2. (Wettermodell)

In Anlehnung an das Bonner Wettermodell der Vorlesung modellieren wir das Wetter (an einem Tag) als Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{\text{sonnig, bewölkt, regnerisch}\}$. Hierzu nehmen wir optimistischerweise die folgende Übergangsmatrix an:

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

a. Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraph. Charakterisieren Sie die Markov-Kette hinsichtlich Irreduzibilität und Periodizität.

b. Berechnen Sie eine stationäre Verteilung. Ist diese eindeutig?

c. Am Dienstag, den 08. Mai 2018, war das Wetter sonnig. Berechnen Sie ausgehend vom obigen Modell die Verteilung des Wetters zur Klausur am Freitag, den 03. August 2018, also die Wahrscheinlichkeiten, dass das Wetter an diesem Tag sonnig, bewölkt oder regnerisch sein wird.

   Hinweis: Zwischen dem 08. Mai und dem 03. August vergehen 87 Tage. Zur Berechnung von P^{87} empfiehlt es sich, die Matrix zu diagonalisieren.

(2 + 3 + 3 Punkte)

Aufgabe 3. (KFZ-Haftpflichtversicherung)

Wir betrachten eine Kfz-Haftpflichtversicherung, die Versicherungsprämien nach dem folgenden *Bonus/Malus-System* bemisst.

Klasse	Jahresprämie
B_1	600 Euro
B_2	500 Euro
B_3	420 Euro
B_4	360 Euro
B_5	300 Euro

Ein Neukunde steigt ein in Stufe B_3. Verursacht er in einem Jahr keinen Unfall, so verbessert sich seine Bonusstufe auf die nächsthöhere. Verursacht er einen Unfall, so verschlechtert sie sich um eine Stufe, bei zwei oder mehr Unfällen verschlechtert sie sich sogar um zwei Stufen (man kann sich aber nicht über Stufe B_1 hinaus verschlechtern bzw. über Stufe B_5 hinaus verbessern). Hierbei nehmen wir an, dass der Versicherte im Durchschnitt pro Jahr 0.2 Unfälle verursacht.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Prämienzahlung im dritten Jahr. Gehen Sie dabei so vor, dass Sie eine Markov-Kette konstruieren, die die Prämienzahlung im jeweiligen Jahr beschreibt (oder, äquivalent dazu, die entsprechende Bonusklasse). Modellieren Sie hierbei die Anzahl der Unfälle pro Jahr als Poisson-verteilte Zufallsvariable (mit Parameter 0.2).

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Seven Eleven)

“Seven Eleven” ist eines der ersten Würfelspiele, das in Casinos eingeführt wurde. Dabei wird mit zwei Würfeln, solange geworfen, bis entweder die Bank oder der Spieler gewonnen hat. Es sei Y_k die Zufallsgröße für die Augensumme im k-ten Wurf.

- Der Spieler gewinnt, falls $Y_1 \in \{7, 11\}$ oder $Y_k = Y_1$ für $k \geq 2$.
- Die Bank gewinnt, falls $Y_1 \in \{2, 3, 12\}$ oder $Y_k = 7$ für $k \geq 2$.

a. Modellieren Sie das Spiel als homogene Markovkette mit 6 Zuständen (Start, Spieler gewinnt, Bank gewinnt, Augensumme im ersten Wurf $\in \{4, 10\}$,...). Geben Sie die Übergangsmatrix T an und entscheiden Sie, ob die Markovkette irreduzibel ist.

b. Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit bei “Seven Eleven”. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Der Vektor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_6)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeiten, dass man bei Zustand i startet und nach endlich vielen Schritten in Zustand 2 (= Spieler gewinnt) landet. Zeigen Sie, dass gewisse Einträge von $\mathbf{a}$ schon vorher feststehen und für die anderen die Beziehung

$$a_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{6} p_{ij} a_j & : \quad i \neq 2\,, \\ 1 & : \quad i = 2\,, \end{cases}$$

gilt, also $a_i = (Ta)_i$ für $i \neq 2$.

(3 + 3 = 6 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Seven Eleven)

Bearbeiten Sie die dritte Programmieraufgabe im Jupyter Notebook von der Webseite. Simulieren Sie das Würfelspiel “Seven-Eleven” aus Aufgabe 4 oben.

- Führen Sie 10000 Simulationen des Spiels durch und bestimmen Sie die relative Gewinnhäufigkeit. Bestimmen Sie zudem die Häufigkeitsverteilung für die Dauer des Spiels bis einer der Zustände "Spieler gewinnt" oder "Bank gewinnt" erreicht wird (denn dort terminiert das Spiel).

- Bestimmen Sie numerisch den Grenzwert $T^* = \lim_{k\to\infty} T^k$ und interpretieren Sie die Einträge $T^*_{1,2}$ und $T^*_{1,3}$ auch im Hinblick auf Aufgabe 4b).

(4 + 1 = 5 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 28.05. bepunktet.

Programmieraufgabe 2. (Zufälliger Irrsprung)

Simulieren Sie die zufällige Irrfahrt eines Springers auf einem $n \times n$ Schachbrett. Alle möglichen Rösselsprünge von einem gegebenen Feld aus sind dabei gleichwahrscheinlich. Die Eingabeparameter sind: `n` als Schachbrettgrösse, `steps` als Anzahl der Sprünge und `samples` als Anzahl der Versuche. Der Springer wird initial zufällig gleichverteilt auf eines der $n \cdot n$ Felder gesetzt. Anschließend springt er `steps` oft und landet auf einem Zielfeld.

- Zählen Sie für jedes Feld wie oft es bei `samples` Versuchen Zielfeld geworden ist und stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar. Sie können die Felder durchnummerieren und einen 2d-Plot verwenden.

- Erzeugen Sie die Übergangsmatrix A und nähern Sie die Grenzverteilung iterativ an. Vergleichen Sie diese mit den relativen Häufigkeiten. "Spielen" Sie auch mit der Startverteilung.

(4 + 1 = 5 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 28.05. bepunktet.