



# Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018  
Prof. Dr. Ira Neitzel  
AR. Dr. Tino Ullrich



## Übungsblatt 7.

Abgabe am **04.06.** vor der Vorlesung.

### Aufgabe 1. (Lagrange Polynominterpolation)

- Gegeben seien die Stützstellen  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Weisen Sie nach, dass die Lagrange-Grundpolynome eine Basis des Polynomraums  $\mathcal{P}_{n-1}$  bilden.
- Betrachten Sie nun die Stützstellen  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 2$ . Stellen Sie die zu den Stützstellen gehörenden Lagrange-Grundpolynome auf.
- Bestimmen Sie die Darstellung der kanonischen Basis  $\{1, x, x^2\}$  von  $\mathcal{P}_2$  in der Lagrangebasis aus Aufgabenteil b).

(2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

### Aufgabe 2. (Vandermonde-Matrizen)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 58 \\ 112 \end{bmatrix}.$$

- Formulieren Sie ein äquivalentes Polynom-Interpolationsproblem und bestimmen Sie dessen Lösung.
- Lösen Sie das lineare Gleichungssystem indem Sie das Interpolationsproblem aus a) lösen.
- Warum sind Vandermonde-Matrizen in der Regel schlecht konditioniert? Was bedeutet das für die Polynominterpolation?

(1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

### Aufgabe 3. (Interpolation des natürlichen Logarithmus)

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \ln(x)$  und die äquidistanten Stützstellen  $x_i = 1 + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Es sei  $p(x)$  das Interpolationspolynom zweiten Grades mit den Stützstellen  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ . Zeigen Sie: Für alle  $x \in [x_i - h/2, x_i + h/2]$  gilt dann die Fehlerabschätzung

$$|\ln(x) - p(x)| \leq \frac{1}{8}h^3.$$

(5 Punkte)

### Aufgabe 4. (Dividierte Differenzen)

Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu

$i$	0	1	2	3	4	5
$x_i$	0	1	2	4	-1	3
$f_i$	-3	1	2	7	-1	6

für  $x_0, x_1, x_2, x_3$  mit Hilfe der Lagrange-Darstellung und der Newton-Darstellung. Wie ändert sich die Newton-Darstellung, wenn man noch die Stützpunkte  $x_4$  bzw.  $x_4, x_5$  hinzunimmt?

(5 Punkte)