Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 10. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Kubische Splines)

Man berechne die Koeffizienten des kubischen Spline

$$s : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad s(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B^z_{i,4}(t)$$

durch die Stützpunkte

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
$s(x_i)$	1	5	1	5	1

mit den periodischen Randbedingungen. Werten Sie den entstehenden Spline an den Stellen $a = 0,5$ und $b = 1,5$ aus.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Lagrange-Interpolation)

Sei $p \in \Pi_4$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f(x) = 2^x$ in den Stützstellen $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ interpoliert.

- Geben sie die Lagrange–Polynome $l_0, \dots, l_4$ zu diesen Stützstellen an und berechnen Sie $p(1/2)$ über die Darstellung $p(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i) l_i(x)$. Berechnen Sie den Fehler zur exakten Lösung.
- Bestimmen Sie die Newton'sche Darstellung des Interpolationspolynoms.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Pade-Interpolation)

Neben den in der Vorlesung vorgestellten Interpolations- und Approximationsverfahren ist auch die Approximation bzw. Interpolation durch rationale Funktionen weit verbreitet (*Padé-Approximation*). Im Folgenden ist eine Padé-Approximation des Kosinus durchzuführen. Genauer gesagt, bestimmen Sie die Koeffizienten der rationalen Funktion

$$r(x) = \tfrac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4}{1 + b_2 x^2},$$

so dass die Differenz zwischen r und cos die folgende Potenzreihendarstellung besitzt:

$$\cos(x) - r(x) = \gamma_8 x^8 + \gamma_{10} x^{10} + \dots .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Riemann-Integral)

Zeigen Sie:
Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und zusätzlich $f(x) \geq 0$ dann folgt aus:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

dass $f(x) = 0$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Gegeben seien die Punkte (x_i, y_i) $i = 0, \ldots, N$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ und $y_0 = y_N$.
Man berechne einen periodischen kubischen Spline S_Δ, welcher die Interpolationsbedingung $S_\Delta(x_j) = y_j$ erfüllt.
Bekanntlich sind die Momente M_j (also die zweiten Ableitungen) von S_Δ an den Stützstellen x_j Lösung des linearen Gleichungssystems (s. Stoer, J. (1983)[4]: Numerische Mathematik, S.91)

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ \lambda_N & & & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} h_j &= x_j - x_{j-1} \quad 1 \leq j \leq N, \quad h_{N+1} = h_1 \\ \lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \quad , \mu_j = 1 - \lambda_j \\ d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right) \end{aligned}$$

Zur Lösung des LGS kann jeder bisher programmierte Algorithmus verwendet werden.
Man teste das Programm an

(a)	$x_j = j/10$	$y_j = \sin(2\pi x_j)$	$j = 0, \ldots, 10$
(b)	$x_j = j/5 - 1$	$y_j = \lvert x_j \rvert$	$j = 0, \ldots, 10$
(c)	$x_j = (j/5 - 1)^3$	$y_j = \lvert x_j \rvert$	$j = 0, \ldots, 10$

Nutzen Sie das erstellte Programm zur Berechnung des Beispiels von Zettel 9 und vergleichen Sie die Ergebnisse:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 1/(1 + 25x^2)$$

Als Ausgabe soll das Programm die Werte von S_Δ an 20 äquidistanten Zwischenstellen ausgeben.

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 20.06. bis 26.06.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 13.06. bis 19.06.2012 aus.

Im kommenden Semester werden für alle Vorlesungen mit Übungsbetrieb Tutor/Innen gesucht. **Interesse?** Auskunft erteilen Dr. Beate Pfistner und Carsten Rezny (CIP-Pool Tutoren)