Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 11. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Neville-Schema)

Sei $p \in \Pi_4$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f(x) = 2^x$ in den Stützstellen $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ interpoliert. Berechnen Sie $p(1/2)$ unter Verwendung des Schemas von Neville.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Zirkulante Matrizen)

Eine Matrix heißt *zirkulant*, falls sie folgende Struktur aufweist:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Zeigen Sie:
Sei A eine zirkulante Matrix, F_n die Fouriermatrix

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \omega^{3(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = F_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^k := \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^{k-1} \\ \omega^{2(k-1)} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)(k-1)} \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$A = \frac{1}{n} F_n D F_n^*$$

und damit sind (λ_k, x^k) die Eigenpaare zu A.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Trigonometrische Interpolation)

Zu den Stützpunkten

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	3	5	1	1

berechne man das interpolierende trigonometrische Polynom

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Ableitung von B-Splines)

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen der B-Splines die folgende Rekursionsformel gilt:

$$B'_{i,r} = (r-1)\Big(\frac{B_{i,r-1}}{z_{i+r-1} - z_i} - \frac{B_{i+r,r-1}}{z_{i+r} - z_{i+1}}\Big), \quad r \geq 2,\ i \in \mathbb{Z}.$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Diskrete Sinus-Transformation)

Implementieren Sie die diskrete Sinustransformation. Benutzen Sie hierbei, die in der Vorlesung gegebene Definition.

- Testen Sie ihr Programm an der Funktion:

  $$f(x) = \frac{7}{10}\sin(2\pi x) + 0.94 \cdot \sin(16\pi x) + 2 \cdot (rand(1) - 0.5);$$

  Filtern Sie das Signal nach denselben Vorgaben wie in der Vorlesung:
  Transformation $\Rightarrow$ Abschneiden hoch frequenter Anteile $\Rightarrow$ Rücktransformation.
  Visualisieren/Plotten Sie die Ergebnisse mit einem Tool ihrer Wahl.

- Lösen Sie für $N = 16, 32, 64, 128.256, 512, 1024$ mit Hilfe des implementierten Verfahrens und dem Ergebnis aus Aufgabe 2 folgendes LGS $Ax = b$ mit:

  a) $A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und

  $$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Benutzen Sie ihre bisherigen Programme zur Lösung des obigen Gleichungssystem und vergleichen Sie die Laufzeiten.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 20.06. bis 26.06.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 13.06. bis 19.06.2012 aus.