Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 12. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Quadratur und Symmetrie)

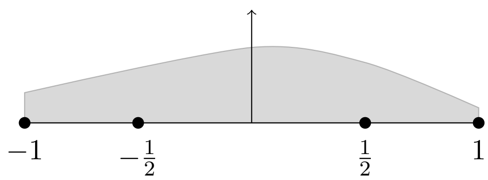
Seien $-a \leq x_{-n}, \ldots, 0, \ldots, x_{+n} \leq a$ $(2n+1)$ Knoten mit $x_{-i} = -x_i$ (d.h. symmetrisch um 0). Der Punkt $x_0 = 0$ kann auch fehlen, dann sind es nur $2n$.

- Zeigen Sie, dass eine Quadraturregel
$$Q[f] := \sum_{i=-n}^{n} w_i f(x_i) \qquad \approx \qquad I[f] = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$
symmetrische Gewichte hat, d.h. $w_{-i} = w_i$.
- Zeigen Sie: Ist n gerade, so ist eine Quadraturregel Q auch auf Π_{n+1} exakt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Quadratur)

Gegeben seien die vier symmetrisch um 0 gelegenen Stützstellen $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ und $x_4 = 1$.



a) Berechnen Sie eine Quadraturformel $Q[f] = \sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i)$, die das Integral
$$I[f] = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$
für Polynome vom Grad 3 exakt integriert und die vorgegebenen Stützstellen verwendet.

b) Erlaubt die Symmetrie der Quadraturformel auch Exaktheitsgrad 4? Belegen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Quadraturfehler)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine äquidistante Intervallunterteilung, d.h. $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq n$ mit $h = (b-a)/n$. Bei Anwendung der summierten Trapezregel T_h gilt dann für $f \in C^2([a,b])$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_h(f) \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Im Falle der summierten Simpson–Regel S_h (n gerade) und $f \in C^4([a,b])$ erhält man

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_h(f) \right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Benutzen Sie diese Fehlerabschätzungen zur Ermittlung der Mindestzahl der Teilintervalle, die man jeweils benötigt, um $\int_0^\pi \sin(x)dx$ mit der Genauigkeit 10^{-5} zu berechnen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Romberg–Quadratur)

Berechnen Sie für das Integral

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$$

mit Hilfe der n-fachen zusammengesetzten Trapezsumme Näherungswerte für $n = 1, 2, 4$. Verbessern Sie diese mit Hilfe des Romberg–Verfahrens durch die Berechnung der ersten drei Zeilen des Romberg–Schemas.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Numerische Quadratur)

Implementieren Sie folgende Verfahren zur numerischen Quadratur:

- Trapezregel
- Simpsonregel
- Trapezsumme
- Simpsonsumme

Testen Sie die erstellten Algorithmen an folgenden Funktionen:

- e^{-x} auf $[-1, 1]$
- $sin^2(x)$ auf $[0, 2\pi]$
- $\frac{1}{x^2}$ auf $[-\pi, \pi]$
- $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ auf $[-1, 1]$

Verfeinern Sie die Schrittweite $h := \frac{b-a}{n}$ für $n = 8, 16, \ldots, 512, 1024$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 04.07. bis 10.07.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 27.06. bis 03.07.2012 aus.