Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 13. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Diagonaldominanz)

Gegeben seien $A = L + D + R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$, wobei A strikt diagonaldominant ist, d. h.

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Sei $M_J := I - D^{-1}A$ die Iterationsmatrix zum Jacobi–Verfahren (Gesamtschrittverfahren) und $M_{GS} := I - (L + D)^{-1}A$ die Iterationsmatrix zum Gauss–Seidel–Verfahren (Einzelschrittverfahren).

a) Zeigen Sie $\|M_J\|_\infty < 1$. Warum folgt die Konvergenz des Jacobi–Verfahrens?

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $z := M_{GS}x$. Zeigen Sie per Induktion nach i:

$$|z_i| \leq \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \|x\|_\infty.$$

Hinweis: $z_i = x_i - \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j + \sum_{j\geq i} a_{ij} x_j \right)$.

c) Beweisen Sie die Konvergenz des Gauss–Seidel–Verfahrens durch Nachweis von $\|M_{GS}\|_\infty \leq \|M_J\|_\infty$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Jacobi Overrelaxation)

Zu einem linearen Iterationsverfahren der Form

$$\phi(x_m) = Gx_m + f$$

definieren wir das zugehörige *relaxierte Iterationsverfahren zu* $\omega \in \mathbb{R}$ mittels der Konvexkombination

$$x_{m+1} := \omega\phi(x_m) + (1 - \omega)x_m.$$

Das Ziel dieser Relaxation ist die Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit des ursprünglichen Verfahrens, ω heißt auch *Relaxationsparameter*.
Gegeben sei nun das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrischen Matrix $A = D - E - F$ mit Einheitsdiagonale $D = I$ und Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

a) Geben Sie das zum Jacobi-Verfahren gehörige relaxierte Iterationsverfahren durch seine Iterationsmatrix M_ω an.

b) Zeigen Sie, dass das relaxierte Jacobi-Verfahren genau dann konvergiert, wenn $0 < \omega < 2/\lambda_n$ ist.

c) Bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter ω_{opt}, für welchen $\rho(G_{\omega=\omega_{opt}})$ minimal wird. Berechnen Sie ebenfalls den Wert des Spektralradius $\rho(M_{\omega_{opt}})$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Iterationsmatrizen)

Gegeben:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Geben Sie die Iterationsmatrix $M = I - W^{-1}A$ für folgende Verfahren an:

- Richardson-Verfahren $W = \tau I$ für $\tau = 0.5$ und $\tau = 1.0$
- Jacobi-Verfahren $W = D$
- Gauß-Seidel $W = D - E$

Führen Sie jeweils zwei Iterationsschritte durch (Startwert: $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$) und berechnen Sie die Fehler $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2$ und $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2$ Begründen Sie das beobachtete Verhalten.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Lagrange-Polynome)

Beweisen Sie folgende Eigenschaft der Lagrange-Polynome $l_i(x)$:

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(0) x_i^{n+1} = (-1)^n x_0 \dots x_n$$

mit den Stützstellen $x_0 \dots x_n$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Iterationsverfahren)

Schreiben Sie je eine Routine, die ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ iterativ nach der Methode von Jacobi, Gauß-Seidel und Richardson löst. Wählen Sie jeweils als Startiterierte den Vektor $x_0 = (0, \dots, 0)^T$.

Die Ausgabe des Programms soll den jeweiligen Lösungsvektor sowie die Anzahl der nötigen Iterationen beinhalten, bis das Verfahren konvergiert ist. Dabei soll die Iteration abgebrochen werden, falls für das Residuum

$$\|Ax_k - b\|_2 \leq 10^{-10} \|Ax_0 - b\|_2$$

gilt.

Testen Sie den Algorithmus anhand der 16×16-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & -I & T & -I \\ & & -I & T \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad T = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

und I die 4×4-Identität ist. Als rechte Seite wähle man $b = (b_1 \; b_2 \; b_2 \; b_1)^T \in \mathbb{R}^{16}$ mit $b_1 = (6, 5, 5, 6)^T \in \mathbb{R}^4$ und $b_2 = (5, 4, 4, 5)^T \in \mathbb{R}^4$.

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 04.07. bis 10.07.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 27.06. bis 03.07.2012 aus.