Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 14.

Abgabe am **Übungsaufgaben (unbenotet)**.

Aufgabe 1. (Newton-Verfahren)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Newton–Verfahren zur Lösung von $F(x,y) = \mathbf{0}$ für jeden Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in [1,2] \times [1,2]$ konvergiert.

b) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1,1)$ zwei Iterationsschritte des Newton–Verfahrens durch.

Aufgabe 2. (Approximation mittels Newton-Verfahren)

Die Wurzelfunktion $a \mapsto \sqrt{a}$ soll für $a \geq 0$ approximiert werden. Wenden Sie dazu das Newton–Verfahren auf die Gleichung

$$f_a(x) = x^2 - a \stackrel{!}{=} 0$$

an. Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens und berechnen Sie für $a = 3$ und $x^{(0)} = 1$ die ersten vier Iterationswerte $x^{(1)}, \ldots, x^{(4)}$.

Aufgabe 3. (Gradienten-Verfahren)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

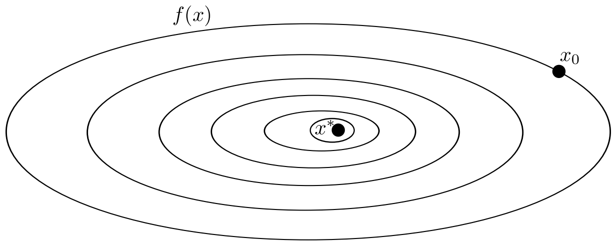
a) Bestimmen Sie die Iterierten x_1 und x_2 des Gradienten-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für den Startwert x_0.

b) Ermitteln Sie die Konvergenzgeschwindigkeit des Gradienten-Verfahrens bei der Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 4. (Gradientenverfahren)

Betrachten Sie das Gradientenverfahren (steepest descent) zur Minimierung des quadratischen Funktionals $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ist.

a) Wieso entspricht die Lösung von $Ax = b$ der Minimierung von $f(x)$? Was bedeutet das für die Suchrichtung? Skizzieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs mit Startwert x_0 anhand des dargestellten Höhenprofils einer stetigen konvexen Funktion f mit globalem Minimum x^*. Eine Ellipse bzw. eine Höhenlinie entspricht dabei $f(x) = \text{const}$.



b) Beim Gradientenverfahren wird im k-ten Schritt $\alpha_k = d_k^T d_k/(d_k^T A d_k)$ berechnet, also für jeden Schritt i.a. ein anderer Skalar. Zeigen Sie, dass $\alpha_k \geq \alpha^* = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$.

c) Zeigen Sie, dass auch die Wahl einer festen Schrittweite α mit $0 < \alpha < 2\alpha^*$ Konvergenz garantiert.