



Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow



Übungsblatt 2. Abgabe am Mittwoch (2012-04-12) vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr).

Aufgabe 1. (Markovketten)

Gegeben sei eine Markovkette mit Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $[P^n]_{i,j} > 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- Angenommen die Kette startet im ersten Zustand. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach zwei Schritten im dritten Zustand ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Wettermodell)

In Anlehnung an das Wettermodell der Vorlesung modellieren wir das Wetter (an einem Tag) als Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{\text{“sonnig“}, \text{“bewölkt“}, \text{“regnerisch“}\}$. Hierzu nehmen wir optimistischerweise die folgende Übergangsmatrix an:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Am Dienstag, 13. Mai, war das Wetter sonnig. Berechnen Sie, ausgehend vom obigen Modell, die Verteilung des Wetters am Dienstag, 26. August, also die Wahrscheinlichkeiten, dass das Wetter an diesem Tag sonnig, bewölkt oder regnerisch sein wird! (Hinweis: Zwischen dem 13. Mai und dem 26. August vergehen 105 Tage. Geeignetes Runden ist ausdrücklich erwünscht)

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Chapman-Kolmogorov)

Es sei $X = X_0, \dots$, eine Markovkette mit Zustandsraum $S = 1, \dots, n$. Dann gilt für alle $l < m < k$, $j, n \leq k$:

$$P(X_k = j | X_l = n) = \sum_{i=1}^k P(X_k = j | X_m = i) \cdot P(X_m = i | X_l = n)$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Markovketten)

Ein Experiment werde durch eine Markov-Kette mit zwei Zuständen $\{r, s\}$ und der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

mit dem unbekannten Parameter $0 \leq p \leq 1$ beschrieben. Das Experiment wird viele Male für jeweils lange Zeit ausgeführt und man beobachtet, dass der Ausgang in 20% der Fälle durch den Zustand r und in den restlichen 80% der Fälle durch s beschrieben wird. Bestimmen Sie den Parameter p !

(5 Punkte)

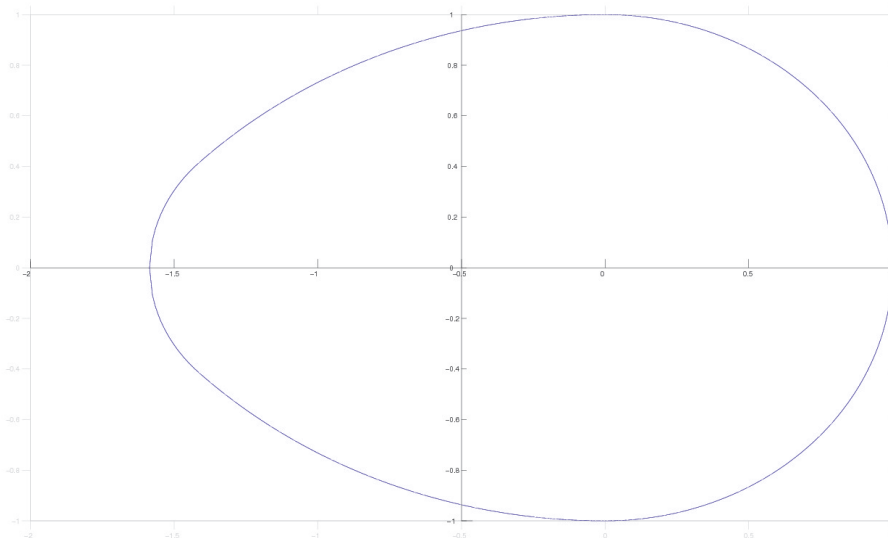
Programmieraufgabe 1. Simulieren Sie die Markovkette aus Aufgabe 1.

- Hierzu sind folgende Routinen zu schreiben: Generierung einer zufälligen Startverteilung (hierfür kann `rand()` benutzt werden), Anwendung auf die Übergangsmatrix und Auswertung der Ergebnisse.
- Schreiben Sie unter Benutzung der obigen Routinen und allen eventuell nützlichen bisher erstellten Routinen ein Programm, welches n Schritte in dieser Markovkette simuliert. Testen Sie für $n = 5; 10; 25; 100; 1000$
- Berechnen sie die Euklidische Norm der Differenz zweier aufeinander folgender Schritte $\|x^{i+1} - x^i\| = \sqrt{(x_1^{i+1} - x_1^i)^2 + (x_2^{i+1} - x_2^i)^2 + (x_3^{i+1} - x_3^i)^2}$. Visualisieren Sie das Verhalten der Norm mit einem geeigneten Visualisierungsprogramm ihrer Wahl (Matlab, GnuPlot, etc.).
- Wiederholen Sie diese Simulation mit $m = 1000$ zufälligen Startverteilungen.

Beschreiben Sie allgemein das beobachtete Verhalten.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 18.04. bis 24.04.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängt in der Woche vom 10.04. bis 17.04.2012 aus.

Frohe Osterfeiertage!



```
y(x)>=-3*sqrt(2) & x<-1*sqrt(2) ) = sqrt(2*(sqrt(2)-1)*(sqrt(2)-1) - (x+1).^2);
y(x)>=-1*sqrt(2) & x<=0) = sqrt(4 - x.^2) - 1;
y(x)>=0 & x<=1) = sqrt(1 - x.^2);
```