Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 4. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Ehrenfestmodell)

Im *Ehrenfest-Modell* betrachtet man N (nummerierte) Kugeln, welche auf zwei Urnen aufgeteilt sind. Zu jedem Zeitpunkt wird eine Kugel zufällig gewählt und der Urne, in der sich diese Kugel gerade befindet, entnommen und in die andere Urne gelegt. Es sei X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix der Markov-Kette X_n auf. Schreiben Sie die Übergangsmatrix für $N = 4$ explizit auf.

b) Klassifizieren Sie die Markov-Kette nach Reduzibilität und Periodizität.

c) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung mit Parametern $p = 1/2$ und N die stationäre Verteilung dieser Markov-Kette bildet.

(Anmerkung: Das Ehrenfest-Modell wurde vom russisch-österreichischen Physikerehepaar Tatjana und Paul Ehrenfest als pädagogisches Beispielmodell zur Erläuterung eines Phänomens der Thermodynamik eingeführt. In diesem Zusammenhang stehen die beiden Urnen für zwei miteinander verbundene Gasbehälter, während die Kugeln für einzelne Moleküle des Gases stehen.)

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Korollar aus Perron-Frobenius)

Beweisen Sie:

Es sei $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{n} \geq 0$ (primitiv). Dann gilt für den maximalen Eigenwert r:

$$\min_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \leq r \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Stationäre Grenzverteilung)

Für irreduzible, aperiodische Markovketten wurde in der Vorlesung gezeigt, dass die stationäre Verteilung π auch Grenzverteilung ist. Das bedeutet, dass die Potenz $\mathbf{P}^n$ der Übergangsmatrizen gegen eine Matrix $\mathbf{W}$ konvergiert mit

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi \end{pmatrix},$$

in dem Sinne, dass alle Zeilen von $\mathbf{W}$ gleich π sind.
Betrachten Sie die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$\mathbf{P}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Markovkette mehr als eine stationäre Verteilung besitzt. Betrachten Sie den Limes von $\mathbf{P}^n$ für $n \to \infty$. Ist dieser Grenzwert vom oben beschriebenen Typ?

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Münzwurfspiel)

Bei einem Münzspiel setzt der Spieler einen Euro danach wird eine Münze geworfen. Bei Kopf (p) gewinnt der Spieler einen Euro, bei Zahl ($q = 1 - p$) verliert er seinen Einsatz. Der Spieler startet mit einem Kapital $x = X_{Start}$ und spielt so lange bis er $l = X_{Gewinn}$ erreicht hat oder Bankrott ($0 = X_{Ruin}$) ist. T_l undd T_0 bezeichnen die Zeiten bis zum Gewinn bzw. Bankrott.
Zeigen Sie:

$$P_x(T_l < T_0) = \begin{cases} \frac{(\frac{q}{p})^x - 1}{(\frac{q}{p})^l - 1} & p \neq q \\ \frac{x}{l} & sonst \end{cases}$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Simulieren Sie das Münzspiel aus Aufgabe 4. Hierbei sind folgende Routinen zu implementieren

- `Muenzwurf()` simuliert einen einzelnen Wurf.
- `Muenzspiel()` simuliert ein komplettes Spiel bis der erwünschte Gewinn oder Bankrott erreicht wird.
- `Ausgabe()` gibt folgende Daten aus: Anzahl der Würfe bis zum Ende, erzielter Gewinn, Bankrott. Eine Weiterverarbeitung der Daten für eventuelle Visualisierungsprogramme ist ratsam.
- Setzen Sie diese Routinen ein, um ein Gesamtprogramm zu schreiben, welches $n = 10, 100, 1000, 2500, 10000$ Münzspiele durchführt. Variieren Sie hierbei die Wahrscheinlichkeiten p, q sowie x und l.

Verifizieren Sie damit das Ergebnis aus Aufgabe 4.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 02.05. bis 08.05.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 25.04. bis 01.05.2012 aus.