Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 5. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Stationäre Verteilung)

Berechnen Sie eine stationäre Verteilung folgender Übergangsmatrix P:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie:
Ist π stationäre Verteilung einer irreduziblen Markovkette, so gilt $\pi_i > 0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Taylor-Reihe)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und a ein Element von I. Dann heißt :

$$\begin{aligned} P_f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \end{aligned}$$

n-tes Taylor-Polynom von f mit Entwicklungspunkt x_0. Nun sei:

$$R_{n+1}(x) := f(x) - P_f(x)$$

Zeigen Sie:

1. (Integralform für $R_{n+1}(x)$) :

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \tag{1}$$

2. Folgern Sie aus (1):
   (Lagrange-Form für $R_{n+1}(x)$) : Es gibt ein $x < \xi < x_0$ so dass gilt:

$$R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Aufgabe 4. (Finite Differenzen)

Die erste Ableitung u' einer reellen Funktion $u(x)$ kann auf einem Gitter der Maschenweite h durch folgenden Differenzenstern diskretisiert werden:

$$\frac{1}{12h}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

also:

$$\frac{1}{12h}(u(x_i - 2h) - 8u(x_i - h) + 8u(x_i + h) - u(x_i + 2h))$$

a) Ermitteln Sie die Konsistenzordnung dieser Diskretisierung. Verwenden Sie hierzu geeignete Taylor-Entwicklungen von u am Punkt x_i.

b) Welche Regularität ist zu fordern?

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Schreiben Sie ein Programm, welches folgenden Ausdruck berechnet:

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berechnen Sie $d_h(1.6)$ für die Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x & d(1.6) &= 0.625 \\ f(x) &= x^2 & d(1.6) &= 3.2 \\ f(x) &= \sin(x)\cos(x) & d(1.6) &= 1 - 2 \cdot \sin(1.6)^2 \end{aligned}$$

Wählen Sie dabei $h = 10^{-k}$ für $k = 1, 2, 3, \dots, 19, 20$ und vergleichen Sie die erhaltene Approximation mit dem tatsächlichen Grenzwert an der Stelle $x = 1.6$. Visualisieren Sie die Ergebnisse und beschreiben Sie das beobachtete Verhalten der Näherungen für kleiner werdendes h.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 02.05. bis 08.05.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 25.04. bis 01.05.2012 aus.