Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 6. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Gemischte Ableitungen)

Diskretisieren Sie die gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

zum einen mit:

- Vorwärtsdifferenzen erster Ordnung
- Zentralen Differenzen zweiter Ordnung

Welche Regularitäten müssen gefordert werden? Zeigen Sie die jeweiligen Konsistenzordnungen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Matrixnormen)

Die p-Norm einer reellen, quadratischen Matrix ist definiert durch $\|A\|_p = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$, wobei $\|x\|_p$ die p-Norm des Vektors x ist.

a) Berechnen Sie $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ und $\|A\|_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie allgemein die Eigenschaften:

b) $\|A\|_p = \max\limits_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$

c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty}$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Unitäre und hermitesche Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt

- *unitär*, wenn gilt:
$$A\overline{A}^T = I$$
- *hermitesch*, wenn gilt:
$$A = \overline{A}^T$$

a) **Zeigen** Sie: Das Produkt zweier unitärer Matrizen ist unitär.

b) **Zeigen** Sie: $det(AB - \lambda I) = det(BA - \lambda I)$, wenn A, B reguläre Matrizen.

c) **Widerlegen** Sie: Das Produkt zweier hermitescher Matrizen ist hermitesch. Geben Sie Forderungen/Einschränkungen an, welche die Aussage wahr werden lassen.

Aus b) folgt, dass AB und BA dieselben Eigenwerte haben.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Komplexes Skalarprodukt)

Ähnlich zum in der Vorlesung definierten Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ wollen wir ein Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ definieren.
Definition:
Eine Abbildung
$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$
heißt *sesquilinear* ($1\frac{1}{2}$ linear), wenn gilt:
$$s(v + v', w) = s(v, w) + s(v', w) \qquad s(\lambda v, w) = \lambda s(v, w)$$
$$s(v, w + w') = s(v, w) + s(v, w') \qquad s(v, \lambda w) = \overline{\lambda} s(v, w)$$
weiterhin heißt s *hermitesch*, wenn zusätzlich gilt:
$$s(w, v) = \overline{s(v, w)}$$
für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. $\overline{\lambda}$ bezeichne das komplex konjugierte von λ.
Eine hermitesche Sesquilinearform heißt *positiv definit*, wenn gilt:
$$s(v, v) > 0 \qquad \forall v \neq 0 \in V$$
Eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform wird als *Skalarprodukt* bezeichnet.

- Zeigen Sie, dass
$$< x, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}$$
ein Skalarprodukt und $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ eine Norm definiert.
- Beweisen Sie folgende Ungleichung
$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Differentiationsmatrizen)

Im vorliegenden Übungsblatt soll das Konzept der *Differenziations-Matrizen* eingeführt werden. Die Grundidee hierzu lässt sich sehr einfach anhand des in der Vorlesung wiederholten Verfahrens der Finiten Differenzen verstehen:

Gegeben sei eine Menge von N Gitterpunkten $\{x_j\}$ und eine Funktion u deren Funktionswerte $\{u(x_j)\}$ an den Gitterpunkten bekannt sind. Das Ziel besteht nun darin Approximationen $w_j \approx u'(x_j)$ an die Ableitungen der Funktion u an den Gitterpunkten zu berechnen.

Angenommen wir wählen die x_j als ein uniformes Gitter mit der Maschenweite h und $u_j = u(x_j)$, dann ergibt sich eine Approximation an die Ableitung mit zweiter Ordnung beispielsweise über die bekannte zentralen Differenz

$$w_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}$$

Nun kann man die Berechnung der zentralen Differenz für alle Gitterpunkte auch als Matrix-Operation umformulieren. Nimmt man periodische Randbedingungen an (d.h. $u_0 = u_N, u_1 = u_{N+1}$), so ergibt sich folgendes Matrix-Vektor-Produkt zur Berechnung der Approximationen:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \\ \vdots \\ \\ w_N \end{pmatrix} = h^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_N \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie ein C/C++ Programm, das die Ableitung der Funktion $u(x) = e^{\sin(x)}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ an N äquidistanten Punkten approximiert. Hierzu muss $u(x)$ entsprechend ausgewertet und eine Differenziationsmatrix aufgestellt werden. Zur Kontrolle werten Sie die Ableitungen für verschiedene Werte von N aus und berechnen Sie die diskrete Maximumsnorm über dem Fehler zwischen den Werten $\{w_i\}$ und der tatsächlichen Ableitung $u'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$. Machen Sie einen doppelt-logarithmischen Plot der Fehlerergebnisse für verschiedene Werte von N.

- Benutzen Sie die bereits bekannten CSR-Matrix Routinen.
- Stellen Sie die Differentiationsmatrix mit dem aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 5 bekannten Stern auf. Beachten Sie hierbei die Erweiterterungen der Matrix für die periodischen Randbedingungen. Nutzen Sie das erstellte Programm zur Berechnung der Ableitung.

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 16.05. bis 22.05.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 09.05. bis 15.05.2012 aus.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 15.5 ihre **Mathe-Party** im Goldenen Engel. Ab 22 Uhr werdet Ihr mit Welcome-Shots begrüßt und an der Bar gibt es Tequila und Fassbier fr 1 Euro! DJ Lost Boy legt wieder für euch auf. Karten gibt es im VVK für 2 Euro und an der AK für 4 Euro. Der VVK findet Do. 10.5., Mo. 14.5. und Di. 15.5. in der Mensa Poppelsdorf statt.