Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 7. Abgabe am **Mittwoch vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Frobenius–Norm)

Die Frobenius–Norm einer reellen, quadratischen Matrix ist definiert als

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2}.$$

Zeigen Sie die Eigenschaften:

a) $\|A\|_F^2 = \operatorname{spur}(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^TA)$

b) $\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$

c) $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$

Hierbei bezeichne $\operatorname{spur}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente der Matrix $C \in \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Kondition und Fehlerverstärkung)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$ und $\kappa_\infty(B)$. Dabei ist die Kondition κ einer regulären Matrix A in einer bestimmten Norm über $\kappa_\bullet(A) = \|A\|_\bullet\|A^{-1}\|_\bullet$ definiert.

b) Lösen Sie für die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \Delta\widehat{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$$

mit einem kleinen $\delta > 0$ die Gleichungssysteme

$$Ax = b, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad A(x + \Delta\widehat{x}) = b + \Delta\widehat{b}.$$

Wie wirkt sich der Fehler in den Eingabedaten der rechten Seite auf die Lösung aus? Vergleichen Sie außerdem die jeweiligen Fehler $\|\Delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$ und $\|\Delta\widehat{x}\|_\infty/\|x\|_\infty$ mit der allgemeinen Fehlerabschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \kappa_\infty(A)\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Diagonaldominanz)

Definition: Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ heißt *strikt diagonaldominant* (zeilendominant), wenn gilt

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n} |a_{ij}| > 0, \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe: Man zeige, daß sich bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus die Diagonaldominanz von $A = LU$ auf U überträgt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (LU-Zerlegung)

a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

wobei $\forall\, i \;\; l_{ii} = 1$ mit $L = (l_{ij})$ gelte.

b) Bestimmen Sie $\det(A)$ mit Hilfe der LU-Zerlegung aus a).

c) Berechnen Sie A^{-1} durch Lösen der Gleichungssysteme

$$Ly_k = e_k, \quad Ux_k = y_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Dabei sind e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (LR-Zerlegung)

a) Schreiben Sie ein C-, C++–Programm, das die LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) einer gegebenen $N \times N$ Matrix A berechnet und die Matrizen L und R ausgibt. Der Wert N darf als fest angenommen werden. In jedem Schritt soll geprüft werden, ob das Diagonalelement, durch das dividiert wird, von Null verschieden ist und ggf. mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden. Testen Sie das Programm anhand der beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 1 & 7 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & 16 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & -10 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Erweitern Sie das obige Programm um Funktionen zur Vorwärtssubstitution $Ly = b$ und Rückwärtssubstitution $Rx = y$. Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $A_1 x = b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 & 17 & 3 \end{pmatrix}^T$, und geben Sie den Lösungsvektor x aus.

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 16.05. bis 22.05.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 09.05. bis 15.05.2012 aus.