Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Montag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

ACHTUNG: Abgabe: Montag vor der Vorlesung (10:15 Uhr)

Aufgabe 1. (Satz von Gerschgorin, Cholesky-Zerlegung)

a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Vereinigung der sogenannten *Gerschgorin-Kreise*

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

liegen. (*Hinweis:* Betrachten Sie zu gegebenem Eigenwert λ einen Eigenvektor x mit normierter maximaler Komponente $|x_i| = 1$.)

b) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch und strikt diagonaldominant mit positiven Diagonaleinträgen, d.h. $a_{ii} > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

c) Untersuchen Sie, für welche der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

eine Cholesky-Zerlegung existiert, und geben Sie diese, falls vorhanden, zusammen mit der Determinante an.

d) Es existiere die Cholesky-Zerlegung $A = \hat{L}\hat{L}^T$. Wie erhält man daraus die LR-Zerlegung von A, wobei in der Hauptdiagonalen von L nur Einsen stehen?

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (LR-Zerlegung)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & b_n & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Berechnen Sie die zugehörige LR–Zerlegung der Form

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ l_2 & 1 & & & & \\ & l_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & l_{n-1} & 1 & \\ 0 & & & & l_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & & & & 0 \\ & r_2 & s_2 & & & \\ & & r_3 & s_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & r_{n-1} & s_{n-1} \\ 0 & & & & & r_n \end{bmatrix}.$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Cholesky)

Schreiben Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Zerlegung

$$A = LL^T$$

einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Verifizieren Sie den Algorithmus dadurch, dass Sie ihn zur Lösung der folgenden Gleichungssysteme verwenden:

a) $Ax = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $Hx = b, \qquad H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n}, \qquad b = H(1, \ldots, 1)^T, \qquad n = 8$

c) $K_h x = b, \qquad K_h$ siehe Vorlesungsskript, Beispiel 5.9 S.163 $\qquad b = (1, \ldots, 1)^T$, $N = 32, 64, 128, 256, (512), (1024)$
Für die Aufgabe (c) implementieren Sie zusätzlich einen Algorithmus der die Cholesky-Zerlegung einer dünnbesetzten Matrix ausrechnet. Hierbei ist eine Speicherung der Matrix in mehreren Vektoren, welche die Diagonalen speichern denkbar. Vergleichen Sie diesen Algorithmus zum vollbesetzten Algorithmus aus dem ersten Teil der Aufgabe. Welche Geschwindigkeiten werden beobachtet?

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools vom 06.06. bis 13.06.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 23.05. bis 05.06.2012 aus.