Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 26.6.2012**

Aufgabe 29. (Konsistenzordnung) (6 Punkte)

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $y'(t) = f(t, y)$, $y(0) = y_0$. Beweisen Sie mithilfe der Taylor–Entwicklung, dass das Verfahren von Heun,

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, y_i) + f\big(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)\big)\Big),$$

die Konsistenzordnung zwei hat, falls f genügend glatt ist.

Aufgabe 30. (Verfahren von Heun) (8 Punkte)

Betrachten Sie das Verfahren von Heun für die beiden Anfangswertaufgaben

$$y'(t) = 2(t+1), \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(t) = \frac{2y(t)}{t+1}, \quad y(0) = 1$$

auf dem Intervall $[0, T]$, $T > 0$. Zeigen Sie, dass beide Probleme dieselbe Lösung haben und dass dieses Verfahren für das erste Problem immer, für das zweite Problem jedoch nie die exakte Lösung erzeugt.

Aufgabe 31. (Konsistenzordnung von Einschrittverfahren) (8 Punkte)

Zur Konvergenzverbesserung der Euler-Verfahren betrachtet man eine erweiterte Klasse von Einschrittverfahren, welche allgemein über folgenden Ansatz definiert werden:

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(t_i + c_j h, \eta_j), \qquad \sum_{j=1}^{s} b_j = 1. \tag{1}$$

Hierbei sind c_j die *Knoten* des Verfahrens, b_j die *Gewichte*, sowie η_j geeignete Näherungen an y_i bzw. y_{i+1}. Die Euler-Verfahren beispielsweise sind Spezialfälle (explizit: $s = 1$, $c_1 = 0$, $\eta_1 = y_i$, sowie implizit: $s = 1$, $c_1 = 1$, $\eta_1 = y_{i+1}$). Beweisen Sie dazu die folgende Aussage:
Hat ein Verfahren der Form (1) die Konsistenzordnung q, dann hat die Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j) \approx \int_0^1 g(x)dx$$

den Exaktheitsgrad $q - 1$.

Gesamtpunktzahl: 22 Punkte