



Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel



Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 10.7.2012**

Aufgabe 35. (Stabilitätsgebiete)

(8 Punkte)

Es seien folgende Butcher-Tableaus gegeben:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \text{b) } \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \text{c) } \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \text{d) } \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & & 1/2 & \\ 1 & & & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} \end{array}$$

Um welche Verfahren handelt es sich dabei? Bestimmen Sie zu den Verfahren a) – c) die jeweiligen Stabilitätsgebiete und skizzieren Sie diese. Geben Sie für das Verfahren d) zumindest das reelle Stabilitätsintervall an.

Hinweis: Bestimmen Sie beim Verfahren c) zunächst das reelle Stabilitätsintervall und verwenden Sie dann den Ansatz $z = -1 + re^{i\varphi}$ sowie $1 = R \cdot \bar{R}$.

Definition: Wendet man ein solches Verfahren auf das Testproblem $y'(t) = \lambda y(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ an und formt es zu $y_{i+1} = R(z)y_i$ um, so heißt das Verfahren *stabil*, wenn $z := \lambda h \in S$ gilt, wobei das *Stabilitätsgebiet* $S := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$.

Aufgabe 36. (Mehrschrittverfahren)

(6 Punkte)

Bestimmen Sie α , β und γ so, dass das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{i+3} - y_{i+1} + \alpha(y_{i+2} - y_i) = h \left[\beta(f(t_{i+2}, y_{i+2}) - f(t_i, y_i)) + \gamma f(t_{i+1}, y_{i+1}) \right]$$

die Konsistenzordnung drei hat.

Aufgabe 37. (Konsistenz und Stabilität von Mehrschrittverfahren)

(6+6 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Mehrschrittverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$:

i) $y_{j+2} - \frac{1}{2}y_{j+1} + \frac{1}{4}y_j = h \left(\frac{2}{3}f_{j+1} - \frac{1}{3}f_j \right)$

ii) $y_{j+2} - y_{j+1} = h(2f_{j+1} - f_j)$

iii) $y_{j+1} - y_j = h \left(\frac{1}{2}f_{j+1} + \frac{1}{2}f_j \right)$

a) Welches der Verfahren ist konsistent? Geben Sie gegebenenfalls auch die zugehörige Konsistenzordnung an.

b) (**Bonusaufgabe**) Welches Verfahren ist konvergent, d.h. stabil und konsistent?

Gesamtpunktzahl: 20+6 Punkte