Numerische Mathematik

Sommersemester 2012

Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 24.04.2012**

Aufgabe 4. (Hermite-Interpolation) (12 Punkte)

a) Berechnen Sie das Hermite–Interpolationspolynom $H_5(x)$, das den Interpolationsbedingungen $H_5(1) = -4$, $H_5'(1) = -7$, $H_5''(1) = -8$, $H_5(2) = -14$, $H_5'(2) = -8$ und $H_5(3) = 14$ genügt.

b) Es sei $f(x) = 1/(1+x^2)$ und P ein kubisches Polynom mit $P(4) = f(4)$, $P'(4) = f'(4)$, $P(5) = f(5)$, $P'(5) = f'(5)$. Man berechne $P(4.5)$ und $P(4.5) - f(4.5)$.

c) $Q(x)$ und $P(x)$ seien Polynome vom Grad ≤ 4 mit $Q(x) = P(x)$ für $x = -1, -a, a, 1$, $0 < a < 1$ und $Q(0) = P(0) + \epsilon$, $\epsilon \neq 0$. Man berechne

$$M(a) \ := \ \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x) - P(x)|$$

für $a = 0.001$, $a = 0.5$, $a = 0.999$.

Aufgabe 5. (Tschebyscheff–Polynome) (12 Punkte)

Die Tschebyscheff–Polynome T_n sind für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch die Rekursionsformel

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

und haben auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Darstellung

$$T_n(x) = \cos\left(n \cdot \arccos x\right).$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die Tschebyscheff–Polynome sind orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\, T_l(x)\, \omega(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k = l \neq 0 \\ \pi & \text{für } k = l = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Orthogonalitätseigenschaft des Kosinus:

$$\int_0^{\pi} \cos(k\phi)\, \cos(l\phi)\, d\phi = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k = l \neq 0. \end{cases}$$

b) Die Tschebyscheff–Polynome sind minimal bezüglich der Maximumnorm $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ unter den Polynomen $P_n \in \Pi_n$ mit führendem Koeffizienten 2^{n-1}.

Hinweis: Beachten Sie, dass das Polynom T_n an den Tschebyscheff–Abszissen $\overline{x}_k := \cos\frac{k\pi}{n}$ alternierend die Werte 1 und -1 annimmt. Betrachten Sie nun ein beliebiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit führendem Koeffizienten 2^{n-1} und $|P_n(x)| < 1$ für $x \in [-1, 1]$.

c) Sei $[a,b]$ ein beliebiges Intervall und $t_0 \notin [a,b]$. Dann ist das modifizierte Tschebyscheff-Polynom

$$\hat{T}_n(t) := \frac{T_n(x(t))}{T_n(x(t_0))} \quad \text{mit} \quad x(t) := 2 \cdot \frac{t-a}{b-a} - 1$$

minimal bezüglich der Maximumnorm $\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ unter den Polynomen $P_n \in \Pi_n$ mit $P_n(t_0) = 1$.

Aufgabe 6. (Hermite-Genocchi-Formel) (8 Punkte)

Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $f \in C^n(I)$. Zeigen Sie, dass für die n-te dividierte Differenz dann

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \int_{\Sigma_n} f^{(n)}(t_0 x_0 + \cdots + t_n x_n)\, dt$$

gilt, wobei Σ_n den n-dimensionalen Standardsimplex bezeichnet:

$$\Sigma_n := \left\{ t = (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0 \text{ für } i = 0, \ldots, n \right\}.$$

Hinweis: Induktion!

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte