Numerische Mathematik

Sommersemester 2012
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Montag, 30.04.2012,**
We6, Raum 6.017, 11-12h $\vee$ 14-15h

Aufgabe 7. (Kondition der Polynominterpolation) (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Konditionszahlen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial y}{\partial f_i}$ für die Polynominterpolation. Um welchen Betrag ändert sich $y = P(x)$, wenn f_i sich um ε ändert? Verwenden Sie die Darstellung mittels Lagrange-Polynomen.

b) Betrachten Sie den Fehler der Hermite-Polynominterpolation einer Funktion f mit $|f^{(n+1)}(x)| \leq c$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ für $n + 1$ äquidistante Stützstellen $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$. Vergleichen Sie den Fehler $P(x) - f(x)$ in den Intervallen $[0, \frac{2}{n}]$ und $[1 - \frac{2}{n}, 1]$ für wachsendes n.

Bemerkung: Diese Diskussion liefert einen Hinweis, dass der Interpolationsfehler am Rand des Intervalls wesentlich größer werden kann als im Inneren. Durch eine kluge Wahl der Stützstellen x_i kann jedoch der Interpolationsfehler über das gesamte Intervall minimiert werden. Diese Eigenschaft haben gerade die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome.

Aufgabe 8. (Rekursionsformel der Bézier-Teilpolynome) (6 Punkte)

Für die Teilpolynome $b_i^k(t)$ der Bézier-Kurve $P(t)$ vom Grad n gilt

$$b_i^k(t) = (1-t)b_i^{k-1}(t) + t b_{i+1}^{k-1}(t)$$

für $k = 1, \dots, n$ und $i = 0, \dots, n-k$. Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 9. (Konstruktion kubischer Splines) (12 Punkte)

Zu einer Unterteilung $\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ ist der kubische Spline $S_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ so definiert, dass

1. $S_\Delta \in C^2[a, b]$ und
2. S_Δ auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ mit einem kubischen Polynom übereinstimmt, d.h. $S_\Delta|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3$.

Bemerkung: Global höhere Polynomgrade führen zu starken Oszillationen in der Interpolation. Bei den Splines ist nun die Idee, eine möglichst glatte Interpolation zu erreichen, indem lokal Polynome niedrigen Grades gewählt werden. An den Stützstellen müssen diese mit den Nachbarpolynomen zweimal stetig differenzierbar ineinander übergehen.

Der kubische Spline $S_\Delta(x)$ interpoliere die Funktion $f(x)$ an den Punkten x_i, $0 \leq i \leq n$.

a) Zeigen Sie, dass S_Δ die stückweise Darstellung

$$S_\Delta(x) = f(x_i)(1-3t_i^2+2t_i^3)+f(x_{i+1})(3t_i^2-2t_i^3)+z_ih_i(t_i-2t_i^2+t_i^3)+z_{i+1}h_i(-t_i^2+t_i^3)$$

besitzt, wobei

$$z_i = S'_\Delta(x_i) \text{ für } 0 \le i \le n$$

sowie

$$x_i \le x \le x_{i+1},\ t_i = (x-x_i)/h_i \text{ und } h_i = x_{i+1} - x_i \text{ für } 0 \le i \le n-1.$$

b) In dieser Darstellung sind die Ableitungen z_i die einzigen Unbekannten. Leiten Sie nun aus der Forderung, dass $S''_\Delta(x)$ stetig ist, die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} + 2z_i\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right) + \frac{z_{i+1}}{h_i} = 3\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h_{i-1}^2} + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h_i^2}\right)$$

für $1 \le i \le n-1$ her.

c) Jetzt fehlen noch zwei Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten z_i. Geben Sie das zu lösende lineare Gleichungssystem für die natürlichen Randbedingungen

$$S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0$$

in Matrixnotation an.

d) Mit welchem Aufwand lässt sich das lineare Gleichungssystem lösen?

Programmieraufgabe 2. (De Casteljau) (12 Punkte)

Schreiben Sie eine Variante des Algorithmus von de Casteljau, welche zu einem Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ in Bézier-Darstellung bzgl. $[0,1]$, gegeben durch seine Bézier-Punkte $b_0, \dots, b_n$, den Wert der k-ten Ableitung $P^{(k)}(t)$ an einer beliebigen Stelle $t \in [0,1]$ berechnet. Testen Sie Ihren Code anhand der Bézier-Punkte $(0,0), (1,1), (2,0), (3,2)$. Werten Sie hierzu das Polynom selbst sowie seine erste und zweite Ableitung an 40 uniform verteilten Punkten im Intervall $[0,1]$ aus. Plotten Sie die Punkte der Polynomauswertung.

Abgabe **Mi 09.05.** und **Do 10.05.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 02.05. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 26 + 12 Punkte