



# Numerische Mathematik

Sommersemester 2012  
Prof. Dr. Carsten Burstedde  
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel



## Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 12.6.2012**

**Aufgabe 22.** (Romberg-Verfahren)

(6 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$I(f) = \int_0^1 x^5 dx$$

mit Hilfe des Romberg-Verfahrens für die Schrittweiten  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = \frac{1}{2}$  und  $h_2 = \frac{1}{4}$ .

b) Wie groß ist in diesem Fall der numerische Integrationsfehler?

c) Geben Sie die Integrationsformeln  $T_{21}$  und  $T_{22}$  an. Zeigen Sie, dass  $T_{22}$  der Milne-Regel entspricht.

d) Zeigen Sie, dass die Formel  $T_{11}$  für die Schrittweiten  $h_0 = 1$  und  $h_1 = \frac{1}{3}$  gerade die 3/8-Regel ergibt.

**Aufgabe 23.** (Gauß-Quadratur)

(6 Punkte)

Betrachten Sie das gewichtete Integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx.$$

a) Für die angegebene Gewichtsfunktion sind die Tschebyscheff-Polynome orthogonal. Geben Sie die Stützstellen und Gewichte der entsprechenden  $N$ -Punkt Gauß-Quadraturformeln an.

b) Berechnen Sie den zugehörigen Approximationsfehler. Welchen polynomialen Exaktheitsgrad haben diese Quadraturformeln?

**Aufgabe 24.** (Mehrdimensionale Quadratur)

(7 Punkte)

Wie betrachten nun iterierte Integrale der Form

$$I(f) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx.$$

Hier hängen also die inneren Integrationsgrenzen  $c$  und  $d$  von der äußeren Koordinate  $x$  ab.

a) Geben Sie die Produkt-Trapezregel zur Berechnung dieser Integrale an.

b) Berechnen Sie die Kreiszahl  $\pi$  näherungsweise mit der Produkt-Trapezregel und der Produkt-Simpson-Regel durch Integration über den Viertelkreis

$$\pi \approx 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx.$$

**Aufgabe 25.** (Monte-Carlo-Integration)

(7 Punkte)

Ein Monte-Carlo-Verfahren mit  $N$  Punkten liefert für ein mehrdimensionales Integrationsproblem mit Dimension  $d$

$$I(f) = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  die folgenden Resultate:

$N$	100	1000	10000	100000
$I(f)$	15,78543	15,71406	15,69174	15,68612

a) Wie groß ist wohl jeweils der Integrationsfehler?

*Hinweis:* Für die Monte-Carlo-Integration gilt die Fehlerordnung  $O(N^{-\frac{1}{2}}) = cN^{-\frac{1}{2}}$ .

b) Wie viele Funktionsauswertungen sind wohl notwendig, um das Integral auf 5 Stellen genau zu berechnen?

c) Angenommen, obige Ergebnisse wurden nicht durch ein Monte-Carlo-Verfahren sondern durch die Produkt-Trapezsumme ermittelt.  $f$  sei dazu differenzierbar und  $h$  eine für alle Dimensionen feste Maschenweite. Wie groß ist die Dimension  $d$ ?

*Hinweis:* Überlegen Sie zunächst, welche Fehlerordnung die Produkt-Trapezsumme in  $h$  hat.

d) Die Funktion  $f$  sei stetig, aber nicht differenzierbar. Welches der besprochenen numerischen Integrationsverfahren würden Sie verwenden, wenn die Dimension  $d = 100$  ist?

**Gesamtpunktzahl: 26 Punkte**