Wissenschaftliches Rechnen I

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag**, **17.04.**

Aufgabe 1. (Lemma von Reusken)

Es sei $\|\cdot\|$ eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm und A eine gegebene Systemmatrix. Darüber hinaus sei G derart gegeben, dass $\left\|I - G^{-1}A\right\| \leq 1$.
Zeige, dass für $S = I - \frac{1}{2}G^{-1}A$ gilt, dass

$$\|AS^\nu\| \leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\,\|G\|\,.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für jede quadratische Matrix B mit $\|B\| \leq 1$ gilt

$$\|(I-B)(I+B)^\nu\| \leq 2^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}.$$

Aufgabe 2. (Glättungseigenschaft des gedämpften Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens)

Die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens ist gegeben durch

$$S := (1-\omega)I - \omega T \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R},$$

mit $T_J = -A_D^{-1}(A_L + A_R)$ bzw. $T_{GS} = -(A_L + A_D)^{-1}A_R$.

a) Bestimmen Sie zunächst jeweils eine Zerlegung der Matrix $A = M + N$, bezüglich der sich die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi- bzw. Gauss-Seidel-Verfahrens mit $\omega = \frac{1}{2}$ darstellen lässt als

$$S = I - \frac{1}{2}M^{-1}A.$$

b) Es sei A schwach diagonaldominant, das bedeutet, es gilt

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i\neq j}|a_{ij}|, \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall $||M^{-1}N||_\infty \leq 1$ gilt.

c) In einem zweiten Schritt soll unter obiger Voraussetzung die Glättungseigenschaft des gedämpften Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens (mit $\omega = \frac{1}{2}$) gezeigt werden. Dazu nehmen wir an, dass

$$||M||_\infty \leq c\,h^{-2},$$

wobei h die Gitterweite der entsprechenden Diskretisierung bezeichne. Zeigen Sie damit die Glättungseigenschaft in der Form

$$||AS^\nu||_\infty \leq C_S \frac{1}{\sqrt{\nu}} h^{-2}.$$

Aufgabe 3. (Mehrgitterverfahren bei geringerer Regularität)

Für die Konvergenz von Mehrschrittverfahren werden zwei Eigenschaften benötigt: Die Glättungseigenschaft

$$\|S^\nu v_h\|_X \leq ch^{-\beta}\nu^{-\gamma} \|v_h\|_Y$$

und die Approximationseigenschaft

$$\|v_h - \mathcal{P}_H v_h\|_Y \leq ch^\beta \|v_h\|_X .$$

In der Vorlesung wurde die Konvergenz des Zweigitterverfahrens mit Richardson-Glättung unter Verwendung der Normen $\|\cdot\|_X = |||\cdot|||_2$ und $\|\cdot\|_Y = |||\cdot|||_0$ gezeigt. Dabei wurde der Regularitätssatz verwendet, also H^2-Regularität vorausgesetzt. Hat man Gebiete mit einspringenden Ecken, kann man aber häufig nur geringere Regularität voraussetzen (die man als $H^{3/2}$-Regularität einführen kann).

Zeigen Sie unter Verwendung der Normen $\|\cdot\|_X = |||\cdot|||_{3/2}$ und $\|\cdot\|_Y = |||\cdot|||_{1/2}$ die Glättungs- und Approximationseigenschaft fürs Zweigitterverfahren mit Richardson-Glättung bei der Anwendung auf eine Systemmatrix A_h mit $\lambda_{\max}(A_h) \sim h^{d-2}$.

Hinweis: Ohne Beweis darf die Abschätzung $\|v_h - \mathcal{P}_H v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^{1/2-d/4}|||v_h|||_{3/2}$ verwendet werden.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Woche 16.-20.04. in der Übung

Programmieraufgabe. (Glättung)

Ziel dieser Aufgabe ist, den in der Vorlesung behandelten Glättungseffekt der klassichen Iterationsverfahren nachzuvollziehen. Schreiben Sie Funktionen, die ν Schritte

a) des Gauß-Seidel- bzw.

b) des Richardson-Verfahrens mit Parameter α

für schwach besetzte Matrizen ausführen.

Testen Sie jeweils an Hand des 1d-Modellproblems

$$-u''(x) = 1 \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

dessen analytische Lösung $u^*(x) = x(1-x)/2$ ist. Verwenden Sie als Startwert $u^{(0)}(x) := u^*(x) + (\sin(5\pi x) + \sin(29\pi x))/10$. Stellen Sie jeweils den Fehler (beispielsweise mit gnuplot) nach $\nu = 0, 1, 2, 3$ und 10 Iterationen dar. Beim Richardson-Verfahren ist α sinnvoll zu wählen.
