Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag**, **24.04.**

Aufgabe 1. (Konvergenzrate beim W-Zyklus)

Zeige für den W-Zyklus, dass für $\rho_1 < 1$ gilt, dass

$$\sup_{\ell} \rho_\ell^2 \le \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

Wie muss ρ_1 beschränkt sein, damit das Verfahren konvergiert?

Aufgabe 2. (Gestörte Systemmatrix)

In einigen Fällen kann die Systemmatrix $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a(v_h, w_h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i v_j$, $v_h, w_h \in V_h$ nur näherungsweise berechnet werden. Dieser genäherten Matrix liegt eine andere Bilinearform $a_h(v_h, w_h) := \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} w_i v_j$ zugrunde.
Wir nehmen an, es gelte

$$\left\| A - \tilde{A} \right\|_2 \le \delta.$$

Schätzen Sie $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ gegen die H^1-Norm von u ab, wobei u_h die Lösung der gestörten Variationsgleichung $a_h(u_h, v_h) = \ell(v_h)$, für alle $v_h \in V_h$ bezeichnet. Wie sind h und δ zu wählen, damit

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon ||u||_{H^1(\Omega)}$$

gilt?
Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie δ zu wählen ist, damit $a_h(\cdot,\cdot)$ koerziv und stetig ist.

Aufgabe 3. (Nichtkonforme Methode, Energienorm)

Sei W ein Hilbertraum und seien $V_h, V \subset W$ Unterräume mit $V_h \not\subset V$ und $\dim V_h < \infty$. Sei ferner $a(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische und auf ganz W koerzive Bilinearform. Ferner sei $u \in V$ die Lösung des Variationsproblems

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

und $u_h \in V_h$ die Lösung des Variationsproblems

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h,$$

wobei $\ell \in W'$ sei. Zeigen Sie, dass dann bezüglich der Energienorm die Abschätzung

$$||u - u_h||_a \leq \inf_{v \in V_h} ||u - v||_a + \sup_{w \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(u,w) - l(w)|}{||w||_a}$$

gilt.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Übung am 03.05.

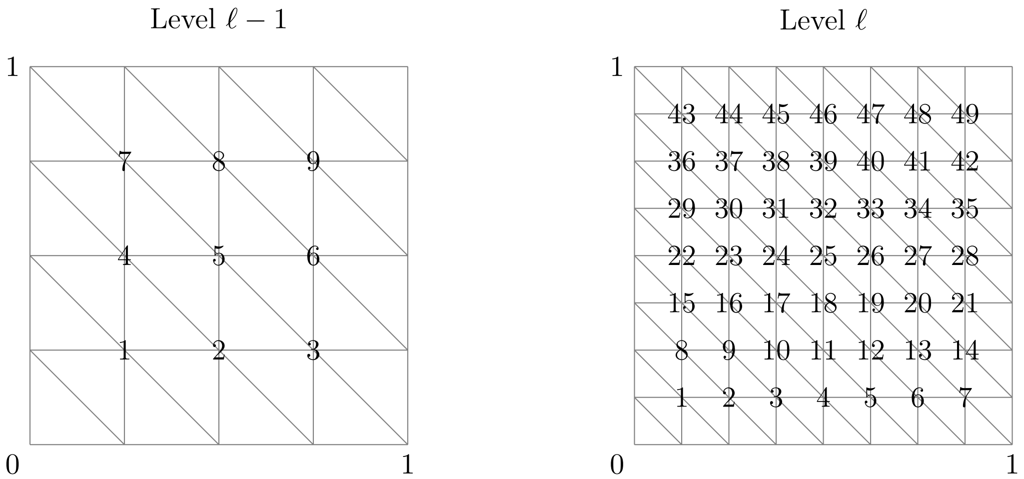
Programmieraufgabe. (Mehrgitterverfahren)

Ziel dieser Aufgabe ist es, das in der Vorlesung vorgestellte Mehrgitterverfahren für den 2d-Modellfall zu programmieren. Das zu lösende Problem ist dabei

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei Courant-Elemente verwendet werden.

a) Schreiben Sie Funktionen zur Prolongation bzw. Restriktion. Es genügt, dass diese für das betrachtete spezielle Gitter funktionieren. Die inneren Gitterpunkte sollen auf jeden Level lexikografisch durchgezählt sein, was bedeutet, dass für diese insbesondere $x_j^{(\ell-1)} \neq x_j^{(\ell)}$ gilt. Die folgende Abbildung soll dies verdeutlichen.



b) Schreiben Sie eine Funktion, die das Mehrgitterverfahren mit V-Zyklus implementiert. Dabei sollen ν_1, ν_2 und ℓ Übergabewerte sein.

c) Programmieren Sie die geschachtelte Iteration.

d) Verwenden Sie den Startwert aus der geschachtelten Iteration, um mit dem Mehrgitterverfahren die diskrete Variationsgleichung iterativ zu lösen mit der Genauigkeit $\varepsilon > 0$ als Eingabeparameter. Als Abbruchkriterium können Sie den Fehlerschätzer

$$||u_k - u_{k-1}|| \leq \varepsilon ||u_k||$$

verwenden.
