Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Donnerstag**, **03.05.**

Aufgabe 1. (Crouzeix-Raviart-Element I)

Crouzeix-Raviart-Elemente haben wie Courant-Elemente auf jedem Dreieck drei Freiheitsgrade.
Zeigen Sie, dass die Anzahl globaler Freiheitsgrade auf einem polygonal berandeten, einfach zusammenhängenden Gebiet bei Crouzeix-Raviart-Elementen und feiner Triangulierung ungefähr dreimal so groß ist wie bei Courant-Elementen.

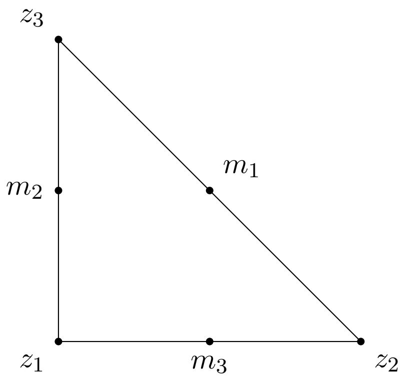
Aufgabe 2. (Crouzeix-Raviart-Element II)

a) Bestimmen Sie die Basisfunktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3 des Crouzeix-Raviart-Elements auf dem Referenzdreieck mit den Eckpunkten $z_1 = (0,0), z_2 = (1,0)$ und $z_3 = (0,1)$.

b) Bestimmen Sie auf dem Referenzdreieck die Matrix $A = (a(\psi_i, \psi_j))_{i,j=1,2,3}$ mit

$$a(u,v) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \int_\tau \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x, \quad u, v \in V_h.$$

c) Bestimmen Sie für das Einheitsquadrat und die Schrittweite h die entsprechende Steifigkeitsmatrix.



Aufgabe 3. (Crouzeix-Raviart-Element III)

Es sei wie bisher V_h der Raum der Crouzeix-Raviart-Elemente mit Nullrandwerten bezüglich der Triangulierung $\mathcal{T}_h$. Durch $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ sei der Raum der Lagrange-Elemente vom Grad zwei bezüglich der selben Triangulierung bezeichnet. Wir definieren eine Abbildung $E_h : V_h \to S_h$ durch

(i) $(E_h v)(m) = v(m)$, falls m ein Kantenmittelpunkt ist

(ii) $(E_h v)(p) =$ Mittelwert über alle zum Eckpunkt p adjazente Kanten

sowie $F_h : S_h \to V_h$ durch

$$(F_h v)(m) = v(m) \quad \text{falls } m \text{ ein Kantenmittelpunkt ist.}$$

Zeigen Sie

a) $F_h E_h v = v$, für alle $v \in V_h$.

b) $||w - F_h w||_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h |w|_{H^1(\Omega)}$, für alle $w \in S_h$ und ein $C_1 > 0$.

c) $||v - E_h v||_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h ||v||_{V_h}$ für alle $v \in V_h$ und ein $C_2 > 0$.

Hinweise: Sie dürfen die inverse Ungleichung verwenden, die besagt, dass

$$||v||_{t,h} \leq c_{\text{inv}} h^{m-t} ||v||_{m,h},$$

für stückweise Polynome vom Grad k und $0 \leq m \leq t$.
Die Definition der Norm lautet (jetzt auch im Skript)

$$||v||_{V_h} := \left(\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} |v|^2_{H^1(\tau)} \right)^{1/2}.$$

Aufgabe 4. (Poincaré-Ungleichung)

Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 3 die folgende Variante der Poincaré-Ungleichung für Crouzeix-Raviart-Elemente mit Nullrandwerten:

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq C ||v||_{V_h} \quad \text{für alle } v \in V_h \text{ und ein } C > 0.$$
