Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag**, **08.05.**

Aufgabe 1. Es seien V, W, f, g, a, b, Z, G wie in Kapitel 5.2. Die Bilinearform a sei symmetrisch und es gelte $a(v,v) > 0$ für alle $0 \neq v \in Z$. Zeigen Sie, dass $u \in G$ genau dann Lösung des restringierten Variationsproblems

$$v \in G : \quad a(v,z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in Z$$

ist, wenn u für $v \in G$ das folgende Funktional minimiert:

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - f(v).$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie Satz 5.11:
Zeigen Sie, dass $(u,p) \in V \times W$ genau dann ein Sattelpunkt (gemäß (5.14)) des zu (5.13) gehörenden Lagrange-Funktionals ist, wenn es Lösung von (5.5) ist.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe 3 ist freiwillig, es können Zusatzpunkte geholt werden.

Aufgabe 3. Diese Aufgabe ist eine Umkehrung der Aussage von Satz 5.4:
Es seien V, W Hilberträume mit endlichdimensionalen Teilräumen V_h, W_h und es sei $a\colon V \times W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.
Zeigen Sie die folgende Aussage:
Angenommen, für jedes $\ell \in W'$ erfülle die Lösung $v \in V$ bzw. $v_h \in V_h$ von (5.2)

$$\lim_{h \to 0} v_h = v.$$

Dann folgt die uniforme inf-sup-Bedingung

$$\inf_{h>0} \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|u_h\|_V \, \|w_h\|_W} > 0.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus) verwenden: Sei $\mathcal{F}$ eine Familie stetiger, linearer Abbildungen von einen Banachraum X in einen normierten Vektorraum Y, so folgt die gleichmäßige Beschränktheit (in der Operatornorm)

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$$

aus der punktweisen Beschränktheit

$$\sup_{x\in X} \|Tx\|_Y < \infty, \quad \text{für alle } T \in \mathcal{F}.$$