Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag**, **15.05.**

Aufgabe 1. (Das Neumann-Problem als Sattelpunkt-Problem)

Betrachten Sie das Neumann-Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Hierbei bezeichne wie gewöhnlich $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein ausreichend glatt berandetes Gebiet und $\nu \in \mathbb{R}^d$ den nach außen gerichteten, normierten Normalenvektor.

a) Wie lautet die Lösbarkeitsbedingung für das Neumann-Problem, die die Existenz einer Lösung ermöglicht? Leiten Sie diese her. Was muss man zusätzlich fordern, um eine eindeutige Lösung zu erhalten?

b) Die Voraussetzung für die Existenz einer eindeutigen Lösung lässt sich als explizite Nebenbedingung formulieren, so dass sich insgesamt ein Sattelpunktproblem für das Neumann-Problem ergibt. Stellen Sie dieses auf.

c) Zeigen Sie nun, dass die Voraussetzungen aus Satz 5.9 erfüllt sind. Verwenden Sie dafür den Spursatz und folgende Form der Poincaréschen Ungleichung: Es gilt

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\left| \int_\Omega v dx \right| + |v|_{H^1(\Omega)} \right)$$

mit einer von Ω unabhängigen Konstante $c > 0$ und $v \in H^1(\Omega)$.

Aufgabe 2. (LBB-Bedingung)

Seien V, Q Hilbert-Räume und $b : V \times Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform. Wir nehmen an, dass Q endlich dimensional ist und setzen

$$\beta := \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{|b(v,q)|}{||v||_Q ||q||_Q}.$$

Zeigen Sie, dass ein $q \in Q$ existiert mit $b(v,q) = 0$ für alle $v \in V$, falls $\beta = 0$.

Aufgabe 3. (Konformität des Raviart-Thomas-Elements)

Es sei $\mathcal{T}_h$ eine konforme Triangulierung eines ausreichend glatt berandeten Gebiets Ω. Zeigen Sie, dass jedes stückweise Polynom v mit $v|_\tau \in (\Pi_k^1)^2$, $\tau \in \mathcal{T}_h$, dessen Normalenkomponente $v \cdot \nu$ an den Elementgrenzen stetig ist, in $H(\text{div}; \Omega)$ enthalten ist.
