Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag**, **22.05.**

Aufgabe 1. (Biharmonische Gleichung als Sattelpunktproblem)

Sei u eine (klassische) Lösung der biharmonischen Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = f \quad & \text{in } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $u \in H_0^1(\Omega)$ zusammen mit $w \in H^1(\Omega)$ eine Lösung der Sattelpunktaufgabe

$$\begin{aligned} (w, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \eta, \nabla u)_{L^2(\Omega)} &= 0 && \text{für alle } \eta \in H^1(\Omega), \\ (\nabla w, \nabla v)_{L^2(\Omega)} &= (f, v)_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 2. (Doppeltes Sattelpunktproblem)

Ein System der Form

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) = f(v) \quad & \text{für alle } v \in V, \\ b(u, q) + c(x, q) = g(q) \quad & \text{für alle } q \in W, \\ c(y, p) + d(x, y) = h(y) \quad & \text{für alle } y \in X, \end{aligned}$$

wird als doppeltes Sattelpunktproblem bezeichnet. Arrangieren Sie dies so, dass ein übliches Sattelpunktproblem erscheint.

Aufgabe 3. Gegeben Sei die Matrix

$$S := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{bmatrix}$$

mit symmetrisch positiv-definitem $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, symmetrisch positiv-semidefiniten $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Vollrang. Zeigen Sie, dass S dann m positive und n negative Eigenwerte hat.

Hinweis: Verwenden Sie den Trägheitssatz von Sylvester.
