Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag**, **05.06.**

Aufgabe 1. Es sei $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ der Quotientenvektorraum, in dem zwei L^2-Funktionen als äquivalent angesehen werden, wenn sie sich nur um eine Konstante unterscheiden. Zeigen Sie, dass für alle Repräsentanten der Äquivalenzklasse $q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ gilt:

$$\int_\Omega q \, \mathrm{d}x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|q\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{L^2(\Omega)} \, .$$

Bemerkung: Damit ist gezeigt, dass die Räume $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ und $L_0^2(\Omega)$ isometrisch sind.

Aufgabe 2. (Stokes-Problem)

Zeigen Sie mittels eines Stokes-Problems mit geeigneter rechter Seite, dass zu jedem $q \in L^2(\Omega)$ ein $v \in [H_0^1(\Omega)]^d$ existiert mit

$$\operatorname{div} v = q \quad \text{und} \quad ||v||_{H^1(\Omega)} \leq c||q||_{L^2(\Omega)}.$$

Aufgabe 3. Für das Stokes-Problem ergibt sich bei konvexem Gebiet oder hinreichend glattem Rand die Regularitätsaussage

$$||u||_{L^2(\Omega)} + ||p||_{H^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

Man verwende diese sowie die übliche Dualitätstechnik, um folgende Abschätzung zu zeigen:

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \leq c\, h(||u - u_h||_{H^1(\Omega)} + ||p - p_h||_{L^2(\Omega)}).$$
