Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag**, **12.06.**

Aufgabe 1. ($\mathcal{Q}_1$-$\mathcal{P}_0$-Element)

Betrachten Sie das $\mathcal{Q}_1$-$\mathcal{P}_0$-Element mit dem Druck

$$q_{(i+1/2,j+1/2)} = \begin{cases} +(-1)^{i+j}, & \text{für } i < i_0, \\ -(-1)^{i+j}, & \text{für } i \geq i_0. \end{cases}$$

Dabei sei $-n < i_0 < n$. Es liegt demnach – abgesehen von einer Versetzung – ein Schachbrettmuster vor. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\left| \int_\Omega q \operatorname{div} v \, \mathrm{d}x \right| \leq c\sqrt{h} ||v||_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in [H_0^1(\Omega)]^2$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Daraus lässt sich erkennen, dass man V_h für $h \to 0$ immer stärker einschränken muss, wenn man eine von h unabhängige Konstante in der inf-sup-Bedingung erzielen will.

Aufgabe 2. (Eine exakte Quadraturformel)

Es sei $\tau \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Seitenmittelpunkten m_{e_i}, $i = 1, 2, 3$, und $p\colon \tau \to \mathbb{R}$ ein quadratisches Polynom. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_\tau p(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) = \frac{|\tau|}{3} \sum_{i=1}^{3} p(m_{e_i}).$$

Aufgabe 3. Es sei $\tau \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Tangentialvektoren $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\sum_{i=1}^{3} (x \cdot t_i)^2 \geq c \, \|x\|_2^2$$
