Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag**, **19.06.**

Aufgabe 1. (Kompakte Operatoren)

Seien X, Y und Z Banachräume sowie $T : X \to Y$ und $\tilde{T} : Y \to Z$ stetige, lineare Operatoren. Zeigen Sie:

a) T ist genau dann kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die Folge $(T\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt.

b) Hat T endlich-dimensionales Bild, so ist T kompakt.

c) Der Raum $\mathcal{K}(X, Y)$ der kompakten Operatoren von X nach Y ist abgeschlossen im (Banach-)Raum der linearen Operatoren $\mathcal{L}(X, Y)$.

d) Ist T oder $\tilde{T}$ kompakt, so ist auch die Verknüpfung $\tilde{T} \circ T : X \to Z$ kompakt.

Hinweis: Gemäß WissRech I, Definition 2.25 heißt ein linearer Operator $T : X \to Y$ kompakt, falls das Bild $M := \overline{T(B_1(0))}$ der abgeschlossenen Einheitskugel kompakt in Y ist.

Aufgabe 2. (Rechnen)

Eine kreisförmige Membran mit Radius 1 werde am Rand fest eingespannt. Die Berechnung der Eigenfunktionen der Membran, aus deren Überlagerung sich die Form nach einer Anregung ergibt, führt auf ein Eigenwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = -\lambda u \tag{1}$$

mit den homogenen Dirichlet Randwerten $u_{|\Gamma} = 0$.

a) Man zeige, dass bei Verwendung von Polarkoordinaten Gleichung (1) in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\lambda u \tag{2}$$

übergeht.

b) Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$u(\theta, r) = A(\theta)B(r)$$

leite man gewöhnliche Differentialgleichungen für A und B her.

c) Für eine radial-symmetrische Lösung, d.h. $A = const$, bestimme man über einen Potenzreihenansatz

$$B(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

die ersten 4 Glieder in Abhängigkeit von λ. Man benutze das Ergebnis zur Berechnung einer Näherung von λ.

Aufgabe 3. (Vielfachheit von Eigenwerten)

a) Zeigen Sie, dass für gewöhnliche Differentialgleichungen (also $\Omega \subset \mathbb{R}$) zweiter Ordnung alle Eigenwerte einfach sind, d.h. zu jedem Eigenwert ist der Raum der zugehörigen Eigenfunktionen eindimensional.

b) Zeigen Sie an Hand des Eigenwertproblems $-\Delta u = \lambda u$ mit Null-Randwerten auf dem Quadrat $(0, a)^2$, dass für partielle Differentialgleichungen mehrfache Eigenwerte vorkommen können.
