Wissenschaftliches Rechnen II

Sommerstemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag**, **26.06.**

Aufgabe 1. (Orthonormalbasis)

Sei X ein (separabler) unendlich-dimensionaler Hilbertraum. In der Vorlesung ist bereits der Begriff der Basis gefallen. Der funktionalanalytische Begriff weicht allerdings insofern von dem algebraischen ab, als dass es nicht mehr nötig ist, sich auf endliche Linearkombinationen zu beschränken.

Wir wollen dies im folgenden präzisieren: Eine Familie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt Schauder-Basis, falls es zu jedem $x \in X$ eindeutig bestimmte Koeffizienten α_k gibt, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \to x, \quad \text{für } n \to \infty. \tag{1}$$

Sei nun $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein System paarweise orthogonaler und normierter Vektoren in X. Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

a) $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Schauder-Basis

b) $\operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in X

c) $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)_X e_k$, für alle $x \in X$

d) $(x, y)_X = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)_X \overline{(y, e_k)_X}$, für alle $x, y \in X$ (Parseval-Identität)

e) $||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)_X|^2$, für alle $x \in X$ (Vollständigkeitsrelation)

f) aus $(x, e_k) = 0$ für ein $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $x = 0$.

In diesem Fall nennt man $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 2. (Vielfachheit von Eigenwerten II)

Gegeben sei (ähnlich wie in Aufgabe 3b von Blatt 9) das Problem $-\Delta u = \lambda u$ in $\Omega := [0, 1]^2$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Betrachtet wird der Eigenwert $\lambda = 50\pi^2$. V_h sei der Raum der linearen Elemente über der üblichen Triangulierung des Quadrats (siehe z.B. WissRech 1, Blatt 9, Aufgabe 4).

Zeigen Sie, dass λ dreifacher Eigenwert ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass für das diskretisierte Problem ein doppelter Eigenwert $\lambda_h^{(1)}$ und ein davon verschiedener einfacher Eigenwert $\lambda_h^{(2)}$ existieren mit $\lim_{h\to 0} \lambda_h^{(1)} = \lambda = \lim_{h\to 0} \lambda_h^{(2)}$.

Hinweis: Die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Problems sind gegeben durch $u^{k,\ell}(x, y) = \sin(k\pi x)\sin(\ell\pi y)$ und die Eigenwerte durch $\lambda^{k,\ell} = (k^2 + \ell^2)\pi^2$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Übung am 05.07.

Programmieraufgabe. (Eigenwertproblem)

Betrachtet wird das Eigenwertproblem aus Aufgabe 2. Als Finite-Elemente-Raum wird ebenfalls der in Aufgabe 2 gegebene verwendet. Wie in der Vorlesung gesehen, lässt sich das diskretisierte Problem auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem $A_h x = \lambda_h M_h x$ zurückführen. Dieses wiederum lässt sich mittels Cholesky-Zerlegung der Massematrix $M_h = LL^T$ auf ein einfaches Eigenwertproblem zurückführen, welches mit der einfachen Vektoriteration gelöst werden kann.

Schreibe ein Programm, das die Steifigkeits- und die Massematrix aufstellt und anschließend das verallgemeinerte Eigenwertproblem löst. Lassen sich die in der Bemerkung am Ende von Kapitel 7 gegebenen Konvergenzraten beobachten?