



Wissenschaftliches Rechnen II

Sommersemester 2012
Prof. Mario Bebendorf
Raoul Venn, Jos Gesenhues



Übungsblatt 12.

Wiederholungsfragen; keine Abgabe

Die folgenden Fragen und Aufgabenstellungen können zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden, dienen jedoch lediglich zur Selbstkontrolle und entsprechen nicht zwangsläufig tatsächlichen Prüfungsfragen. Insbesondere werden für eine gute Prüfungsleistung Beweisideen vorausgesetzt.

Mehrgitter

- Wie lässt sich die Glättungseigenschaft klassischer Iterationsverfahren mathematisch fassen?
- Welche Schritte sind beim Zweigitterverfahren notwendig und wie lässt es sich als Iterationsverfahren auffassen?
- Welche Konvergenzordnung ergibt sich für das Zweigitterverfahren mit Richardson-Glättung?
- Welche Möglichkeiten gibt es, die Zweigitteridee auf mehr Gitter zu verallgemeinern? Erläutere V- bzw. W-Zyklus.
- Wie lässt sich die Konvergenz des W-Zyklus auf das Zweigitterverfahren zurückführen?
- Welche Schritte sind für den Beweis der Konvergenz des V-Zyklus nötig?
- Welche Komplexität besitzt das Mehrgitterverfahren?
- Wie würden Sie den Startwert für das Mehrgitterverfahren wählen?
- Wie gut ist dieser Startwert und wie verhält es sich mit der Komplexität?

Nichtkonforme und gemischte Methoden

- Warum ist es sinnvoll, nichtkonforme Methoden zu betrachten? Welche grundsätzlichen Unterschiede gibt es zu konformen Methoden?
- Wie lässt sich der Konsistenzfehler im konformen bzw. nichtkonformen Fall abschätzen?
- Wie lässt sich der Satz von Aubin-Nitsche auf nichtkonforme Methoden verallgemeinern?

- Liefern Sie ein Beispiel für nichtkonforme Diskretisierung.
- Welchen Approximationsfehler kann man beweisen, wenn statt eines polygonal berandeten ein C^2 -Gebiet vorliegt?
- Leiten Sie eine gemischte Formulierung des Poisson-Problems her. Warum ist A nicht koerziv?
- Inwiefern bilden die gemischten finiten Elemente eine Verallgemeinerung der finiten Elemente? Welche Bedingungen müssen vorausgesetzt werden, damit eindeutige Lösbarkeit gezeigt werden kann?
- Welche Abschätzung gegen die Bestapproximation ergibt sich im Fall konformer Diskretisierung?
- Erläutern Sie den Zusammenhang von Sattelpunktproblemen und restringierten Variationsgleichungen.
- Welchen Aussagen existieren jeweils bezüglich der (eindeutigen) Lösbarkeit? Welche Rolle spielt in diesem Zusammenhang die LBB-Bedingung?
- Beweisen Sie die Konvergenz der Methode der gemischten finiten Elemente.
- Wozu dient das Kriterium von Fortin?
- Wie lauten primal- und dual-gemischte Formulierung des Poisson-Problems und wie lässt sich jeweils die eindeutige Lösbarkeit beweisen?
- Wozu dient das Raviart-Thomas-Element und welche Konvergenzordnung ergibt sich?
- Welche Schwierigkeiten ergeben sich bei der numerischen Lösung von Sattelpunktproblemen? Erläutern Sie das Uzawa- und das Bramble-Pasciak-CG-Verfahren.

Stokessche Gleichung

- Leiten Sie die Variationsformulierung der Stokesschen Gleichungen her und zeigen Sie, unter welchen Voraussetzungen schwache Lösungen auch klassische Lösungen sind.
- Beweisen Sie die eindeutige Lösbarkeit.
- Weshalb ist das Q_1/P_0 -Rechteckselement zur Diskretisierung ungeeignet?
- Geben Sie ein geeignetes Element an und zeigen Sie die diskrete LBB-Bedingung.
- Wie folgt aus der diskreten LBB-Bedingung die Konvergenz des Bramble-Pasciak-Verfahrens?

Eigenwertprobleme

- Geben Sie ein Beispiel eines Eigenwertproblems an und leiten Sie die Variationsformulierung her.
- Unter welchen Bedingungen kann die Spektraltheorie angewandt werden und wie lässt sie sich auf das Variationsproblem anwenden?
- Wie lässt sich die Variationsformulierung diskretisieren?

- Unter welchen Voraussetzungen konvergieren die diskreten Eigenwerte- und Funktionen und welche Konvergenzraten lassen sich zeigen?

Gebietszerlegungsmethoden

- Wie sieht die Fehlerdarstellung bei der klassischen, multiplikativen Schwarz-Methode aus?
- Weshalb lässt sich die multiplikative Schwarz-Methode nicht als additive Methode umschreiben?
- Beweisen Sie die lineare Konvergenz des Fehlers in der Energienorm.
- Welche Möglichkeiten gibt es, die Schwarz-Iteration zu parallelisieren?
- Wozu dient die Grobgitterkorrektur?
- Wovon ist die Kondition des additiven Schwarz-Projektors abhängig?

Elliptisch Variationsungleichungen

- Wie lässt sich ein Minimierungsproblem als Variationsungleichung formulieren?
- Formulieren Sie eine Variationsungleichung erster Art und beweisen Sie die eindeutige Lösbarkeit.
- Wie lässt sich der Approximationsfehler abschätzen?
- Geben Sie ein Beispiel an für eine Variationsungleichung zweiter Art.
- Unter welchen Voraussetzungen lässt sich hierfür die eindeutige Lösbarkeit zeigen?