



Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel



Übungsblatt 13.

Abgabe am **freiwillige Aufgaben ohne Wertung**

Aufgabe 50. (Begriffserklärungen) (0 Punkte)

Erklären Sie kurz folgende Begriffe:

- lokaler Fehler
- globaler Fehler
- Fehlerordnung
- Runge-Kutta-Verfahren (explizit, semi-implizit und implizit)
- Stabilitätsgebiet eines Verfahrens.

Aufgabe 51. (Konsistenzordnung 1) (0 Punkte)

Zeigen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren genau die Konsistenzordnung $p = 1$ besitzt. Wie groß ist die zugehörige Fehlerkonstante?

Aufgabe 52. (Konsistenzordnung 2) (0 Punkte)

Zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel Konsistenzordnung 2 besitzt.

Aufgabe 53. (Gauss-Quadratur) (0 Punkte)

Zeigen Sie für die Gaußschen Quadraturformeln $Q(f) = (b - a) \sum_{i=1}^s w_i f(t_i)$:

Alle Gewichte w_i sind positiv.

Hinweis: Wenden Sie die s -stufige Quadraturformel auf das Polynom

$$q_i(t) = \prod_{k=1, k \neq i}^s (t - c_k)^2$$

vom Grad $2s - 2$ an und vergleichen Sie mit dem exakten Wert des Integrals.

Aufgabe 54. (Gauss-Quadratur) (0 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine s -stufige Quadraturformel der Ordnung $p > 2s$ gibt.

Hinweis: Führen Sie die Behauptung $p > 2s$ mit Hilfe des Polynoms

$$q(t) = \prod_{k=1}^s (t - c_k)^2$$

vom Grad $2s$ zum Widerspruch.

Aufgabe 55. (Implizites Runge-Kutta-Verfahren)

(0 Punkte)

Betrachten Sie das folgende implizite Runge-Kutta-Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} (3 - \sqrt{3})/6 & 1/4 & 1/4 - \sqrt{3}/6 \\ (3 + \sqrt{3})/6 & 1/4 + \sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Von welcher Ordnung ist das Verfahren? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Gesamtpunktzahl: 0 Punkte