Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 25.06.2013**

Aufgabe 38. (Fehlerabschätzung der Rechteckregel) (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 2.5 der Vorlesung: Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(a) \right\| \leq (b-a) \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Aufgabe 39. (Fehlerabschätzung für Quadraturformeln) (4 Punkte)

Eine Quadraturformel für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ der Form

$$Q(f) = (b-a) \sum_{i=1}^{s} w_i f(\sigma_i)$$

heißt *von der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$, falls für alle Polynome g vom Grad $\leq p-1$ gilt:

$$Q(g) = \int_a^b g(t)dt.$$

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie: Für eine Quadraturformel der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\left\| Q(f) - \int_a^b f(t)dt \right\| \leq C(b-a)^p \int_a^b \|f^{(p)}(t)\| dt$$

für alle $f \in C^p([a,b],\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 40. (Peano-Kern) (4 Punkte)

Wir betrachten erneut den Fehler einer Quadraturformel (siehe Aufgabe 39)

$$R(f) = Q(f) - \int_0^1 f(t)dt.$$

Mit einer geeigneten Funktion $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dem sog. *Peano-Kern* der Quadraturformel, lässt sich dieser Fehler auch schreiben als

$$R(f) = \int_0^1 K(t) f^{(p)}(t) dt.$$

Ermitteln Sie den Peano-Kern für die linksseitige bzw. die rechtsseitige Rechtecksregel, sowie die Trapezregel. Zeigen Sie damit anschließend die folgenden Abschätzungen für alle $f \in C^1([0,1],\mathbb{R}^d)$:

$$\left\| \int_0^1 f(t)dt - f(0) \right\| \le \int_0^1 \|f'(t)\|dt,$$
$$\left\| \int_0^1 f(t)dt - f(1) \right\| \le \int_0^1 \|f'(t)\|dt,$$

sowie

$$\left\| \int_0^1 f(t)dt - \Big((1-\theta)f(0) + \theta f(1) \Big) \right\| \le \max\{\theta, 1-\theta\} \cdot \int_0^1 \|f'(t)\|dt$$

für alle $\theta \in [0,1]$. Zeigen Sie schließlich für alle $f \in C^2([0,1], \mathbb{R}^d)$:

$$\left\| \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}\Big(f(0) + f(1) \Big) \right\| \le \frac{1}{8} \int_0^1 \|f''(t)\|dt.$$

Aufgabe 41. (Lipschitz-Bedingung im expliziten Eulerverfahren) (4 Punkte)

Wir betrachten das explizite Eulerverfahren für die Aufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u_0.$$

Die Funktion f erfülle eine Lipschitz-Bedingung bzgl. des zweiten Arguments, d.h. es existiere eine Konstante $L \ge 0$ mit

$$\|f(t,w) - f(t,v)\| \le L\|w - v\| \qquad \text{für alle } t \in [0,T], \;\; v, w \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass dann für die Gitterfunktionen u_τ sowie die gestörten Gitterfunktionen $\widetilde{u}_\tau$ (siehe Vorlesung 2.19) des expliziten Eulerverfahrens gilt:

$$\|\widetilde{u}^{(k)} - u^{(k)}\| \le e^{t_k L}\|y^{(0)}\| + \frac{1}{L}\left(e^{t_k L} - 1\right) \max_{i=1,\dots,k} \|y^{(i)}\|$$

für alle $\widetilde{u}_\tau \in X_\tau$.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie

$$e^{(t_j - t_k)L}\tau_{k-1} \le \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{(t_j - t)L} dt.$$

Programmieraufgabe 10. (Euler-Verfahren) (16 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem (1) aus Aufgabe 30 (Blatt 8).

Implementieren Sie zusätzlich zum expliziten / impliziten Euler-Verfahren (Programmieraufgabe 9, Blatt 9) das Euler-Heun-Verfahren.

Verwenden Sie nun alle drei Verfahren für verschiedene Werte von $\lambda = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ sowie $\delta = 0.0, 0.01, 0.1, 0.5, 0.9$, um die Lösung $y(t)$ von Problem (1) an der Stelle $t = 1$ auszuwerten. Benutzen Sie konstante Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, usw. Betrachten Sie dabei beide Varianten $g(t) = \arctan(t)$ sowie $g(t) = e^{-t^2}$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse der drei Verfahren jeweils mit der exakten Lösung!

Abgabe **Mo 24.06.** und **Di 25.06.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 17.06. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 16 + 16 Punkte