Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 02.07.2013**

Aufgabe 42. (Explizites Runge-Kutta-Verfahren) (4 Punkte)

Wir betrachten das explizite Runge-Kutta-Verfahren der Stufe s (siehe Vorlesung 2.34). Geben Sie Voraussetzungen an b, c und A an, unter denen die Lipschitz-Bedingung an f (Ann. 1)

$$\exists\, L > 0 : \ \forall\, t \in [0, T],\ v, w \in \mathbb{R}^d : \quad \|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|$$

die Lipschitzbedingung an Φ (Ann. 2)

$$\exists\, \Omega > 0 : \ \forall\, t \in [0, T],\ v, w \in \mathbb{R}^d,\ \tau < \tau_{\max} : \quad \|\Phi(t, v, \tau) - \Phi(t, w, \tau)\| \leq \Omega\|v - w\|$$

impliziert.

Aufgabe 43. (Konsistenzfehler des verbesserten Euler-Verfahrens) (4 Punkte)

Sei $u \in C^3\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ und gelte für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Lipschitz-Bedingung bzgl. des zweiten Arguments, d.h. es existiere ein $L > 0$ mit $\|f(t, w) - f(t, v)\| \leq L\|w - v\|$ für alle $t \in [0, T]$ und $v, w \in \mathbb{R}^d$.
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der Konsistenzfehler des verbesserten Euler-Verfahrens abgeschätzt werden kann durch

$$\|\psi_\tau(u)\| \leq \kappa\tau^2,$$

wobei $\kappa = (1 + L) \cdot \int_0^T \|u''(\sigma)\| + \|u'''(\sigma)\| d\sigma$.

Aufgabe 44. (Euler-Heun-Verfahren) (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $u'(t) = f(t, u)$, $u(0) = u_0$. Beweisen Sie mithilfe der Taylor-Entwicklung, dass das Euler-Heun-Verfahren die Konsistenzordnung zwei hat, falls f genügend glatt ist.

Aufgabe 45. (Wärmeleitungsgleichung) (4 Punkte)

Wir betrachten das folgende Anfangs-Randwertproblem: finde $u : [0, 1] \times [0, T]$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \forall x \in (0, 1),\ \forall t \in [0, T], \\ u(x, t) &= 0 && x = 0,\ x = 1,\ \forall t \in [0, T], \\ u_0(x, 0) = u_0(x) &= \sin(\pi x) && \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung für dieses Problem ist gegeben durch $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cdot \sin(\pi x)$. Man diskretisiere den Ort mittels Finiter Differenzen (Schrittweite h) und die Zeit mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens (Schrittweite τ). Geben Sie eine explizite Formel für die Approximation $u(x,1)$ an. Es sei h nun fix und $k = \frac{1}{h} - 1$. Ersetzen Sie nun $u_0(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x)$ durch $u_0(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x) + \delta \sin(k\pi x)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\delta \geq 0$ (hochfrequente Störung). Die exakte Lösung für dieses Problem ist gegeben durch

$$u_\delta(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cdot \sin(\pi x) + \delta = e^{-\pi^2 k^2 t} \cdot \sin(\pi k x).$$

Geben Sie eine explizite Formel für die Approximation $u_\delta(x,1)$ an. Wählen Sie nun als Zeitschrittweite $\tau = ch$ bzw. $\tau = ch^2$, wobei jeweils $c > 0$ fest ist und deuten Sie die Ergebnisse.
Hinweis: Schreiben Sie das Euler-Verfahren als $u^{(k+1)} = Ku^{(k)}$ und nutzen Sie die Eigenzerlegung der Matrix K.

Programmieraufgabe 11. (Runge-Kutta-Verfahren) (16 Punkte)

Programmieren Sie

- das explizite Euler-Verfahren,
- das Euler-Heun-Verfahren,
- das Runge-Kutta-Verfahren der Stufe 3 aus der Vorlesung,
- das Runge-Kutta-Verfahren der Stufe 4 aus der Vorlesung.

Testen Sie die Verfahren für folgende Beispiele:

- $u' = u - t^2 + 1$, $u(0) = \frac{1}{2}$.
- $u' = -u \tan t$, $u(0) = 1$.
- $u' = -100u \sin t \cos t$, $u(0) = 1$.

Vergleichen Sie den Fehler für $\tau = 10^{-k}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Abgabe **Mo 08.07.** und **Di 09.07.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 01.07. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 16 + 16 Punkte