Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 09.07.2013**

Aufgabe 46. (Richardson-Extrapolation, Lemma 2.11) (4 Punkte)

Sei $\hat{u} : [t_k, T] \to \mathbb{R}^d$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(t_k) = u^{(k)},$$

wobei hier Anfangszeitpunkt t_k sowie Anfangswert $u^{(k)}$ vorgegeben sind. Seien weiter $u^{(k+1)}$ sowie $v^{(k+1)}$ definiert als

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \Phi\left(t_k, u^{(k)}, \tau_k\right), \\ v^{(k+1)} &= \widetilde{v} + \frac{\tau_k}{2} \cdot \Phi\left(t_k + \frac{\tau_k}{2}, \widetilde{v}, \frac{\tau_k}{2}\right), \end{aligned}$$

mit $\widetilde{v} = u^{(k)} + \frac{\tau_k}{2}\Phi(t_k, u^{(k)}, \frac{\tau_k}{2})$.
Weiter erfülle f die Lipschitz-Bedingung ("Annahme 2"), d.h. es existiere ein $\Omega > 0$ mit

$$\|\Phi(t, v, \tau) - \Phi(t, w, \tau)\| \leq \Omega\|v - w\| \qquad \forall t \in [t_k, T],\ v, w \in \mathbb{R}^d,\ \tau < \tau_{\max}.$$

Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen:

a) $\hat{u}(t_{k+1}) - u^{(k+1)} = \tau_k^{p+1} \cdot C(t_k, u^{(k)}) + \mathcal{O}(\tau_k^{p+2})$.

b) $\hat{u}(t_{k+1}) - v^{(k+1)} = 2\left(\frac{\tau_k}{2}\right)^{p+1} \cdot C(t_k, u^{(k)}) + \mathcal{O}(\tau_k^{p+2})$.

Aufgabe 47. (Stabilitätsgebiete) (4 Punkte)

Es seien folgende Butcher-Tableaus gegeben:

a) $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$

Um welche Verfahren handelt es sich dabei? Bestimmen Sie zu den Verfahren a) – c) die jeweiligen Stabilitätsgebiete und skizzieren Sie diese.
Hinweis: Bestimmen Sie beim Verfahren c) zunächst das reelle Stabilitätsintervall und verwenden Sie dann den Ansatz $z = -1 + re^{i\varphi}$ sowie $1 = R \cdot \bar{R}$.

Aufgabe 48. (Eindeutigkeit der Lösung) (4 Punkte)

Die Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ erfülle die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t, w) - f(t, v)\| \leq L\|w - v\| \qquad \text{für alle } t \in [0, T], v, w \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie für alle $t_k \in [0, T]$, $u^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ und $\tau_k \in [0, T - t_k]$: Die Gleichung

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau_k f(t_{k+1}, u^{(k+1)})$$

mit $t_{k+1} = t_k + \tau_k$ besitzt für alle Schrittweiten $\tau_k < 1/L$ genau eine Lösung $u^{(k+1)} \in \mathbb{R}^d$.
Hinweis: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 49. (Stabilitätsgebiete) (4 Punkte)

Leiten Sie für folgende Verfahren jeweils die Stabilitätsfunktion her:

a) verbessertes Eulerverfahren;

b) klassisches Runge-Kutta-Verfahren der 4. Stufe.

Geben Sie außerdem für beide Verfahren das Stabilitätsgebiet, für b) zumindest das reelle Stabilitätsintervall an!

Programmieraufgabe 12. (Wärmeleitungsgleichung) (16 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitungsgleichung (siehe auch Aufgabe 45): finde $u : [0,1] \times [0,T]$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \forall x \in (0,1),\ \forall t \in [0,T], \\ u(x,t) &= 0 && x = 0,\ x = 1,\ \forall t \in [0,T], \\ u_0(x,0) = u_0(x) &= \sin(\pi x) && \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Lösen Sie nun die diskretisierte Form des Problems (für $T = 1$) (analog zu Aufgabe 45) mit Hilfe des

a) expliziten Euler-Verfahrens,

b) impliziten Euler-Verfahrens.

Betrachten Sie insbesondere jeweils für festes $h = 0.1, 0.05, 0.01$ die Zeitschrittweiten $\tau = ch$ bzw. $\tau = ch^2$, wobei jeweils $c = 1$ bzw. $c = 0.1$ konstant ist. Deuten Sie die erhaltenen Resultate.

Abgabe **Mo 08.07.** und **Di 09.07.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 01.07. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 16 + 16 Punkte