Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 23.04.2013**

Aufgabe 6. (Summe von konvexen Funktionen) (3 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 1.10 der Vorlesung:
Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer und konvex sowie $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ konvex. Für $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ ist auch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

konvex. Falls sogar eine der Funktionen strikt konvex ist, dann ist es auch f.

Aufgabe 7. (Quadratische Funktion) (6 Punkte)

Betrachten Sie die quadratische Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma$$

mit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- f ist konvex $\Leftrightarrow$ Q ist positiv semi-definit.
- f ist strikt konvex $\Leftrightarrow$ Q ist positiv definit.
- f ist strikt konvex $\Leftrightarrow$ f ist gleichmäßig konvex.

Aufgabe 8. (Konvexität der Abstandsfunktion) (4 Punkte)

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge sowie

$$\operatorname{dist}_X(x) := \inf_{y \in X} \|y - x\|$$

der Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu der Menge X (bezüglich der Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$). Man zeige, dass die Abbildung $x \mapsto \operatorname{dist}_X(x)$ konvex ist.

Aufgabe 9. (Konvexe Mengen) (4 Punkte)

Man zeige, dass

$$X_1 := \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 \geq 1/x_1 \right\},$$
$$X_2 := \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \right\}$$

zwei abgeschlossene und konvexe Mengen sind, dass ihre Minkowski-Summe

$$X_1 + X_2 := \{ x = a + b \mid a \in X_1, b \in X_2 \}$$

jedoch eine offene konvexe Menge bildet.

Programmieraufgabe 2. (Newton-Verfahren) (12 Punkte)

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Das (mehrdimensionale) Newton–Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von F ist definiert durch

$$x_{m+1} := x_m - (DF)^{-1}(x_m) \cdot F(x_m).$$

Implementieren Sie das mehrdimensionale Newton-Verfahren und finden Sie mit Hilfe des Verfahrens eine approximierte Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 =& (\cos x_1 - \sin x_2)/4, \\ x_2 =& (\cos x_1 - 2\sin x_2)/4. \end{aligned}$$

Hinweis: Als Startvektor wähle man $x_0 = (0,0)^T$.

Abgabe **Mo 22.04.** und **Di 23.04.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 15.04. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 17 + 12 Punkte