Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universität bonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag, 30.04.2013**

Aufgabe 10. (Projektion) (4 Punkte)

Zeigen Sie die Eindeutigkeit aus Lemma 1.14 der Vorlesung:
Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sowie $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Dann gibt es ein **eindeutig** bestimmtes $y \in X$ mit

$$\|y - x\| \leq \|z - x\| \quad \forall z \neq y, z \in X.$$

Aufgabe 11. (Projektionsoperator) (3 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 1.16 aus der Vorlesung:
Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$\|\mathfrak{P}_X(y) - \mathfrak{P}_X(x)\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x, y \in X,$$

d.h. der Operator $x \mapsto \mathfrak{P}_X(x)$ ist Lipschitzstetig und beschränkt.

Aufgabe 12. (Projektionsoperator) (3 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 1.17 aus der Vorlesung:
Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$\langle x - y, \mathfrak{P}_X(x) - \mathfrak{P}_X(y) \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Falls $\mathfrak{P}_X(x) \neq \mathfrak{P}_X(y)$, gilt sogar die strikte Ungleichung.

Aufgabe 13. (Tangentialkegel) (6 Punkte)

Bestimmen Sie zunächst grafisch, dann rechnerisch für den zulässigen Bereich $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq 0\}$ jeweils den Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(y)$ und den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_{\text{lin}}(y)$ im Punkt y. Genügt y den Regularitätsbedingungen von Abadie?

a) $g(x) = (x_2 - x_1^5, -x_2)^T, \; y = (0,0)^T$.

b) $g(x) = (x_2^2 - x_1 + 1, 1 - x_1 - x_2)^T, \; y = (1,0)^T$.

Programmieraufgabe 3. (Quadratisches Programm) (10 Punkte)

Wir betrachten ein Optimierungsproblem der Form

$$\min f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma,$$
$$\text{NB: } b_j^T x = \beta_j \quad (j = 1, \ldots, p),$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $c, b_j \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, p)$. Es handelt sich hierbei um ein sog. quadratisches Programm mit Gleichheitsrestriktionen.

Man kann nun zeigen, dass für ein lokales Minimum x^* dieses Optimierungsproblems Lagrange-Multiplikatoren $\mu_j^* \in \mathbb{R}$, $(j = 1, \ldots, p)$ existieren, so dass das Paar (x^*, μ^*) den KKT-Bedingungen

$$\begin{aligned} Qx + c + \sum_{j=1}^{p} \mu_j b_j &= 0, \\ b_j^T x &= \beta_j \quad (j = 1, \ldots, p) \end{aligned}$$

genügt.

a) Schreiben Sie die obigen KKT-Bedingungen als lineares Gleichungssystem um!

b) Betrachten Sie nun das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} &\min f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ &f(x) = \frac{5}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3^2 - 21x_1 - 60x_2 - 46x_3 + 5, \\ \text{NB:} \quad &-x_1 + x_2 - x_3 = -5; \qquad 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 37 \end{aligned}$$

Schreiben Sie nun ein Programm, welches hierzu einen KKT-Punkt sowie die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren bestimmt, indem das entsprechende lineare Gleichungssystem gelöst wird. Welchen Löser (LAPACK) setzen Sie ein?

Abgabe **Mo 06.05.** und **Di 07.05.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 29.04. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 16 + 10 Punkte