Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 07.05.2013**

Aufgabe 14. (Tangentialkegel und Normalkegel) (3 Punkte)

Zu einem Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(x)$ kann man den zugehörigen **Normalkegel** als polaren Kegel $\mathcal{N}_X(x) = \left\{v \in \mathbb{R}^d \mid \forall u \in \mathcal{T}_X(x) : v^T u \leq 0\right\}$ definieren.
Zeigen Sie dazu folgende Aussagen:

a) Der Tangentialkegel ist ein abgeschlossener Kegel.

b) Der Normalkegel ist ein konvexer abgeschlossener Kegel.

Bemerkung: Eine Teilmenge M eines K-Vektorraumes (K geordneter Körper) heißt (linearer) Kegel, wenn für jedes $x \in M$ und jedes $\lambda \in K$, $\lambda \geq 0$ auch $\lambda x \in M$ ist.

Aufgabe 15. (Gleichmäßige Konvexität) (6 Punkte)

a) Seien $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|Ax-b\|^2$ genau dann gleichmäßig konvex ist, wenn A invertierbar ist.

b) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \supset \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig konvex mit Konstante κ, wenn $g(x) = f(x) - \kappa\|x\|^2$ konvex ist.

Aufgabe 16. (MFCQ) (4 Punkte)

Sei x^* ein lokales Minimum des Optimierungsproblems

$$\min\ f(x) \quad \text{mit NB} \quad g(x) \leq 0,\ h(x) = 0$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$.
Man zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) MFCQ gilt in x^*.

(b) Die Menge der zu x^* gehörenden Lagrange-Multiplikatoren $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ist nichtleer und beschränkt.

Aufgabe 17. (KKT–Bedingungen, Regularitätsbedingungen) (4 Punkte)

Betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\min\ x_3 - \frac{1}{2}x_1^2 \\ \text{NB:}\quad & x_3 + x_2 + x_1^2 \geq 0, \\ & x_3 - x_2 + x_1^2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Sei $x^* = (0,0,0)^T$.

a) Gibt es zu x^* Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^* \in \mathbb{R}^3$ derart, dass (x^*, λ^*) den KKT-Bedingungen genügt?

b) Welche der Regularitätsbedingungen Abadie CQ, MFCQ, LICQ sind erfüllt?

c) Von welcher Art ist der Punkt x^*?

Programmieraufgabe 4. (Inexaktes Newton-Verfahren) (16 Punkte)

Beim inexakten Newton-Verfahren wird die Newton-Gleichung $\nabla^2 f(x_k)d = -\nabla f(x_k)$ nicht mehr exakt, sondern nur noch approximativ gelöst. Dieses Verfahren kann insbesondere auch auf hochdimensionale Optimierungsprobleme angewendet werden.

Algorithmus 1. *Inexaktes lokales Newton-Verfahren*
input: Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Genauigkeit $\epsilon \geq 0$
output: Folge von Iterierten $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

(1) Setze $k := 0$.

(2) Ist $\|\nabla f(x_k)\|_2 \leq \epsilon$: STOP.

(3) Wähle eine Toleranz $\eta_k > 0$ und bestimme eine Suchrichtung $d_k \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)d_k\|_2 \leq \eta_k \|\nabla f(x_k)\|_2.$$

(4) Setze $x_{k+1} := x_k + d_k$.

(5) Erhöhe $k := k + 1$ und gehe zu Schritt (2).

Man kann nun bestimmte Bedingungen an die Wahl der Toleranzen $\{\eta_k\}$ stellen, um lokal lineare, superlineare bzw. quadratische Konvergenz des Verfahrens zu erreichen.

a) Implementieren Sie das inexakte lokale Newton-Verfahren und verwenden Sie zum Lösen des Gleichungssystems das Jacobi-Verfahren.

b) Testen Sie Ihr Programm anhand der *Funktion von Himmelblau*:

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2.$$

Diese Funktion besitzt ein lokales Maximum in $(-0.270845, -0.923039)$, vier lokale Minima in $(3.0, 2.0)$, $(-2.805118, 3.131312)$, $(-3.779310, -3.283186)$, $(3.584428, -1.848126)$, sowie 4 Sattelpunkte. Verwenden Sie als Startvektoren folgende Werte: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(20, 20)$, $(-20, 20)$, $(20, -20)$, $(-20, -20)$. Testen Sie für jeden Startvektor verschiedene Toleranzen η_k, z.B. $\eta_k = 0.1$, $\eta_k = \frac{1}{k+1}$, $\eta_k = 10^{-k}$. Wie wirkt sich die Wahl der η_k auf die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens aus?

Abgabe **Mo 06.05.** und **Di 07.05.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 29.04. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 17 + 16 Punkte