# Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universitätbonn

## Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 14.05.2013**

**Aufgabe 18.** (Variante des Newton-Verfahrens) (6 Punkte)

Wir betrachten eine Variante des Newton-Verfahrens zur Minimierung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Sei dazu $x^* \in \mathbb{R}^d$ ein stationärer Punkt von $f$, d.h. $\nabla f(x^*) = 0$. Nun soll die folgende quadratische Näherung an $f$ minimiert werden:

$$q^{(k)}(x) := f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)}),$$

wobei $x^{(k)}$ den aktuellen Iterationspunkt bezeichnet. Man erhält folgenden

**Algorithmus 1.** *Lokales Newton-Verfahren für stationäre Punkte*

(1) Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon \geq 0$, setze $k := 0$.

(2) Ist $\|\nabla f(x^{(k)})\|_2 \leq \epsilon$: STOP.

(3) Bestimme $d^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}).$$

(4) Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$, $k := k + 1$, und gehe zu Schritt (2).

Sei nun $\nabla^2 f(x^*)$ regulär. Ferner sei $\nabla^2 f$ lokal Hölder-stetig, d.h. es ist

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^*$ und ein festes $\alpha \in (0, 1]$ (für $\alpha = 1$ erhält man wieder die lokale Lipschitz-Stetigkeit). Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x^{(0)} \in B_\delta(x^*)$ gilt:

a) Algorithmus 1 ist wohldefiniert und erzeugt eine gegen $x^*$ konvergente Folge $\{x^{(k)}\}$.

b) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq c\|x^{(k)} - x^*\|^{1+\alpha}$. Im Spezialfall $\alpha = 1$ ergibt sich also wieder die schon bekannte quadratische Konvergenz.

**Aufgabe 19.** (Newton-Verfahren) (4 Punkte)

Wie kann man die Minimierungaufgabe

$$f(x, y) = x(1 + x) + y^2 \to \min, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

mit dem Newton-Verfahren lösen? Man führe ausgehend von $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0, 0)$ zwei Iterationsschritte durch. Wie lautet die exakte Lösung der Minimierungaufgabe?

**Aufgabe 20.** (KKT–Bedingungen, Regularitätsbedingungen) (6 Punkte)

Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\min \; -(x_1+1)^2-(x_2+1)^2 \quad \text{u.d.N.} \quad x_1^2+x_2^2 \le 2,\; x_1 \le \gamma, \tag{1}$$

wobei $\gamma \ge -\sqrt{2}$ fest vorgegeben sei.

a) Ermitteln Sie anhand einer Skizze die Lösung $x^* = x^*(\gamma)$ dieses Optimierungsproblems. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\gamma = -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < \gamma \le 1$ und $\gamma > 1$.

b) Genügt $x^*$ den Regularitätsbedingungen LICQ, MFCQ bzw. Abadie CQ?

c) Gibt es zu $x^*$ ein $\lambda^* \in \mathbb{R}^2$, so dass $(x^*, \lambda^*)$ ein KKT-Punkt der Aufgabe (1) ist?

**Aufgabe 21.** (Fritz-John Punkt, KKT-Punkt) (4 Punkte)

Sei $x^*$ ein lokales Minimum des Optimierungsproblems

$$\min \; f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \le 0,\; h(x) = 0, \tag{2}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ derart, dass die MFCQ-Bedingung in $x^*$ erfüllt ist.
Zeigen Sie: Ist $(\rho^*, x^*, \lambda^*, \mu^*)$ ein Fritz-John-Punkt von (2) (zu dessen Existenz siehe Bemerkung der Vorlesung), so gilt $\rho^* > 0$, d.h. das Tripel $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ ist bereits ein KKT-Punkt von (2).

**Programmieraufgabe 5.** (Nelder–Mead–Verfahren) (18 Punkte)

Implementieren Sie die Methode von Nelder und Mead (Algorithmus 1.3 der Vorlesung) mit den Parametern

$$\alpha = 1,\;\; \beta = 2,\;\; \gamma = \frac{1}{2},\;\; \epsilon = 10^{-8}.$$

Das Startsimplex soll dabei wie folgt bestimmt werden: ausgehend von einem Startpunkt $x^{(0)}$ wähle man die weiteren Punkte als $x^{(i)} = x^{(0)} + s \cdot e_i$ für $i = 1, \ldots, d$, wobei $e_i$ die Standard-Basis des $\mathbb{R}^d$ und $s > 0$ ein Skalar ist.
Testen Sie Ihr Programm anhand der folgenden Beispielfunktionen:

a) *Rosenbrock–Funktion*

$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$$

mit $x^{(0)} = (-1.2, 1)^T$.

b) *Crescent–Funktion*

$$f(x,y) = \max\left\{x^2 + (y-1)^2 + y - 1, -x^2 - (y-1)^2 + y + 1\right\}$$

mit $x^{(0)} = (-1.5, 2)^T$.

c) *Funktion von Himmelblau*

$$f(x,y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

mit $x^{(0)} = (0, 0)^T$.

Testen Sie Ihr Verfahren für verschiedene Werte von $s$, z.B. $s = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$. Wieviele Iterationen werden jeweils benötigt? Welche Werte ergeben sich für $x^*$ und $f(x^*)$?

Abgabe **Mo 27.05.** und **Di 28.05.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 13.05. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

**Gesamtpunktzahl: 20 + 18 Punkte**