Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 04.06.2013**

Aufgabe 26. (Lemma 1.44 der Vorlesung) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang}(B) = n$, sowie $\langle Au, u \rangle > 0$ für alle $u \neq 0$ mit $B^T u = 0$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ ist regulär.

b) Sei nun A auch regulär und symmetrisch. Dann ist mit $N := (B^T A^{-1} B)^{-1} B^T A^{-1}$, $H := A^{-1}(I - BN)$ die Inverse M^{-1} gegeben durch

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} H & N^T \\ N & -NAN^T \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27. (Lemma 1.46 der Vorlesung) (4 Punkte)

Seien $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ stetig differenzierbare Funktionen. Gesucht sei $x \in \mathbb{R}^d$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ h_j(x) &= 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Sei weiter (x^*, λ^*, μ^*) ein zugehöriger KKT-Punkt, welcher die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. Es gilt $g_i(x^*) + \lambda_i^* \neq 0 \quad i = 1, \ldots, m$.
2. Es gilt die LICQ-Bedingung in (x^*, λ^*, μ^*).
3. Es gilt $\langle \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) t, t \rangle > 0 \quad \forall\, t \in M$ mit

$$M = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : t \neq 0, \langle \nabla h_j(x^*), t \rangle = 0 \; \forall j = 1, \ldots, n, \langle \nabla g_i(x^*), t \rangle = 0 \; \forall i \in \mathfrak{I}(x^*) \right\}.$$

Desweiteren sei $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \mapsto \Phi(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \\ \min\{-g(x), \lambda\} \\ h(x) \end{bmatrix}.$$

Dann existiert die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_\Phi((x^*, \lambda^*, \mu^*))$ und ist regulär.

Aufgabe 28. (Richtungsableitung der Penalty-Funktion) (6 Punkte)

Seien $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ stetig differenzierbare Funktionen. Wir definieren die sog. exakte l_1-Penalty-Funktion als

$$P_1(x; \alpha) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\} + \alpha \sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|,$$

wobei $\alpha > 0$ ist.
Wir wollen nun die Richtungsableitung $P_1'(x; t; \alpha)$ der Penalty-Funktion in Richtung $t \in \mathbb{R}^d$ berechnen.
Hinweis: Die Richtungsableitung einer Funktion $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ in Richtung $t \in \mathbb{R}^d$ ist gegeben durch $\theta'(x; t) := \lim_{\delta \to 0} \frac{\theta(x+\delta t) - \theta(x)}{\delta}$. Ist θ differenzierbar in x, gilt bekanntlich $\theta'(x; t) = \nabla\theta(x)^T t$.

a) Berechnen Sie zunächst die Richtungsableitung der Funktionen $\theta_1(x) := |x|$ sowie $\theta_2(x) = \max\{0, x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie die *Kettenregel für richtungsdifferenzierbare Funktionen*: Seien $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben sowie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ durch $f := g \circ h$ definiert. Weiter sei h richtungsdifferenzierbar in x, g richtungsdifferenzierbar in $h(x)$ sowie g lokal Lipschitz-stetig um $h(x)$. Dann ist auch f richtungsdifferenzierbar in x mit Richtungsableitung $f'(x; t) = g'(h(x); h'(x; t))$ für jedes $t \in \mathbb{R}^d$.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Penalty-Funktion $P_1'(x; t; \alpha)$ in Richtung $t \in \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 29. (Penalty-Funktion) (5 Punkte)

Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem

$$\min\ f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma \qquad \text{u.d.N.} \quad h(x) := b^T x = 0, \tag{1}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch positiv definit ist und $b, c \in \mathbb{R}^d$, $b \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^d$ der Aufgabe (1) und den zugehörigen Lagrange-Parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie zu festem $\alpha > 0$ das Minimum $x^{(\alpha)}$ der zugehörigen Penalty-Funktion $P(x; \alpha) := f(x) + \frac{\alpha}{2}(h(x))^2$.

c) Zeigen Sie: $x^* = \lim\limits_{\alpha \to \infty} x^{(\alpha)}$.

d) Zeigen Sie: $\lambda^* = \lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha \cdot h(x^{(\alpha)})$.

e) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathcal{H}_P$ von $P(x; \alpha)$ und zeigen Sie

$$\lim_{\alpha \to \infty} \operatorname{cond}_2(\mathcal{H}_P(x^*; \alpha)) = \infty,$$

wobei $\operatorname{cond}_2(\cdot)$ die Spektralnorm bezeichnet.

Hinweis: Sie dürfen – falls benötigt – die sog. *Sherman-Morrison-Formel* verwenden: Seien $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulär, $u, v \in \mathbb{R}^m$, sowie $1 + v^T B^{-1} u \neq 0$. Dann ist die Matrix $B + uv^T$ regulär und ihre Inverse ergibt sich als

$$(B + uv^T)^{-1} = \left(E_m - \frac{B^{-1} u v^T}{1 + v^T B^{-1} u}\right) B^{-1}.$$

Programmieraufgabe 7. (Aktive-Mengen-Strategie für quadr. Prog.) (16 Punkte)

Implementieren Sie den Algorithmus 1.7 der Vorlesung. Dabei dürfen Sie voraussetzen, dass ein zulässiger Startpunkt $x^{(0)}$ bekannt ist.
Testen Sie Ihr Programm anhand des folgenden Problems:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -x_1 - x_2 \leq 0, \\ & x_2 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \leq 5, \\ & -x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

mit dem zulässigen Startvektor $x^{(0)} = (5, 0)^T$ und $\lambda^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Geben Sie in jedem Iterationsschritt k die folgenden Werte aus: $x^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mathfrak{A}(x^{(k)})$ sowie $f(x^{(k)})$.
Vergleichen Sie Ihre Werte mit jenen aus der Tabelle 5.1 im Buch Geiger / Kanzow: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*, S. 205.

Abgabe **Mo 10.06.** und **Di 11.06.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 27.05. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 19 + 16 Punkte