Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 11.06.2013**

Aufgabe 30. (AWP) (4 Punkte)

Man betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \lambda(y - g(t)) + \dot{g}(t), \\ y(0) &= g(0) + \delta, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $g \in C^1([0,\infty))$ beschränkt sei.

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem (1).

b) Diskutieren Sie die Wirkung der Störung δ für die drei Fälle $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda = 0$.

c) Visualisieren Sie die Lösung für $\delta = 0$ und $\delta = 10^{-2}$ mit $g(t) = \arctan(t)$ bzw. $g(t) = e^{-t^2}$.

Aufgabe 31. (AWP) (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y; a), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{2}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion f sei stetig auf $\Omega = [0,T) \times \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ und für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ gelte eine lokale Lipschitz-Bedingung der Form

$$\|f(t, y; \hat{a}) - f(t, z; \widetilde{a})\|_2 \le L_K \|(y, \hat{a}) - (z, \widetilde{a})\|_2, \qquad (t, y, \hat{a}), (t, z, \widetilde{a}) \in K.$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Lösung des Anfangswertproblems stetig vom Parameter a abhängt.

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Differentialgleichung für die Funktion $Y = \begin{bmatrix} y \\ a \end{bmatrix}$.

Aufgabe 32. (Stetige Abhängigkeit vom Anfangsdatum) (4 Punkte)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$\big(f(t, y) - f(t, z)\big)^T (y - z) \le l \, \|y - z\|_2^2$$

für alle (t, y), $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t, y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t, z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a, b) \subseteq (0, T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a, b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt} \|y_0 - z_0\|_2 \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Damit hängt $y' = f(t, y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t)\, dt$ mit $x(t)$ aus a) über geeigneten Integrationsgrenzen.

Aufgabe 33. (Variationsformulierung, Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Sei V ein geeigneter Funktionenraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $a(w, v)$ eine Bilinearform auf V, z.B.

$$a(w, v) = \int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Wir betrachten nun das folgende Anfangsvariationsproblem: Gesucht sei eine Funktion $u : [0, T) \to V$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) &= \langle f(t), v\rangle \quad \text{für alle } v \in V, \text{ für alle } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4}$$

für gegebene Daten u_0 und f gilt.

Führen Sie nun den sog. Galerkin-Ansatz durch: Betrachten Sie einen endlichdimensionalen Teilraum $V_h \subset V$ sowie eine zugehörige Funktion u_h. Es sei $\{\phi_i : i = 1, \dots, n_h\}$ im folgenden eine Basis des Raumes V_h. Entwickeln Sie die Lösungsfunktion in dieser Basis mit zeitabhängigen Koeffizienten, d.h. $u_h(t, x) = \sum_{k=1}^{n_h} u_k(t)\phi_k(x)$ und testen Sie (4) mit $v = \phi_k(x)$, $k = 1, \dots, n_h$. Formulieren Sie schließlich das neue Anfangswertproblem als System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Hilfe der sogenannten *Massenmatrix* $M_h = (M_{ik})_{i,k=1,\dots,n_h}$ mit $M_{ik} = (\phi_k, \phi_i)$ sowie der *Steifigkeitsmatrix* $K_h = (K_{ik})_{i,k=1,\dots,n_h}$ mit $K_{ik} = a(\phi_k, \phi_i)$.

Programmieraufgabe 8. (SQP-Verfahren) (16 Punkte)

Man implementiere den Algorithmus 1.9 der Vorlesung (SQP-Verfahren) für das Problem

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0, h(x) = 0.$$

Als Matrix H_k wähle man jeweils die Hesse-Matrix $\nabla^2_{xx} L(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)})$ der Lagrange-Funktion. In Schritt 4 verwenden Sie den Algorithmus aus Programmieraufgabe 7 (Strategie der aktiven Menge). Um diesen Algorithmus stets mit einem zulässigen Punkt starten zu können, setze man voraus, dass g konvex und h affin-linear ist und dass überdies ein Punkt $\widetilde{x}$ mit $g(\widetilde{x}) \leq 0$, $h(\widetilde{x}) = 0$ bekannt ist; dann ist nämlich der Vektor $\triangle x := \widetilde{x} - x^{(k)}$ zulässig für das quadratische Hilfsproblem.

Testen Sie Ihren Code anhand des folgenden Beispiels:

$$f(x) = 3(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 3)^2, \quad g_1(x) = x_1^2 - x_2, \quad g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Wählen Sie $\widetilde{x} = (0, \frac{1}{2})^T$ sowie $x^{(0)} = (\frac{1}{2}, 1)^T, \lambda^{(0)} = (0, 0)^T$.

Abgabe **Mo 10.06.** und **Di 11.06.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 03.06. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 12 (+ 4) + 16 Punkte