Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Sven Beuchler
Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 18.06.2013**

Aufgabe 34. (Eulerverfahren) (4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Anfangswertaufgabe:

$$u'(t) = au^2(t) + bu(t), \qquad u(0) = c.$$

Führen Sie jeweils für konstante Schrittweite h zwei Schritte des expliziten bzw. impliziten Eulerverfahrens, sowie des Euler-Heun-Verfahrens durch.

Aufgabe 35. (Mehrschrittverfahren) (4 Punkte)

Im Gegensatz zu Einschrittverfahren nutzen Mehrschrittverfahren nicht nur die Werte eines einzigen, sondern mehrerer vorheriger Stützpunkte. Da im ersten Schritt jedoch i.a. nur der Wert eines Stützpunktes vorhanden ist, benötigt man zur Initialisierung noch ein Einschrittverfahren.
Betrachten Sie nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) - 2u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 0.$$

Sie soll mit dem expliziten 3-Schritt-Verfahren

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{12}\Big(23f(t_k, u_k) - 16f(t_{k-1}, u_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, u_{k-2})\Big)$$

und der festen Schrittweite $h = 1$ gelöst werden. Führen Sie eine Startrechnung mit dem expliziten Euler-Verfahren durch und berechnen Sie anschließend den ersten Schritt des 3-Schritt-Verfahrens.

Aufgabe 36. (Adams-Bashforth- / Adams-Moulton-Verfahren) (4 Punkte)

In dieser Aufgabe wird das explizite Zweischritt Adams-Bashforth-Verfahren

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}\Big(3f(t_k, u_k) - f(t_{k-1}, u_{k-1})\Big)$$

sowie das implizite Zweischritt Adams-Moulton-Verfahren

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{12}\Big(5f(t_{k+1}, u_{k+1}) + 8f(t_k, u_k) - f(t_{k-1}, u_{k-1})\Big)$$

betrachtet. Berechnen Sie mit den Verfahren für die Schrittweite $h = 1$ Näherungen an die Lösung u des Modellproblems

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = 1, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

mit $\lambda = -10$ zum Zeitpunkt $t_N = 5$. Als Startwerte verwenden Sie $y_0 = u(0) = 1$ und $y_1 = 4 \cdot 10^{-5}$. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit den Werten der tatsächlichen Lösung!

Aufgabe 37. (Quadraturformeln und Eulerverfahren) (4 Punkte)

Sei die Anfangswertaufgabe – wie in der Vorlesung – umformuliert als folgende Integralgleichung:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, u(s))ds, \qquad k = 0, \ldots, m-1.$$

Für die linksseitige Rechtecksregel erhält man bekanntlich das explizite Eulerverfahren, für die rechtsseitige Rechtecksregel das implizite. Leiten Sie gleichermaßen für die Mittelpunktsregel sowie die Trapezregel entsprechende Verfahren her.

Programmieraufgabe 9. (Explizites/implizites Euler-Verfahren) (16 Punkte)

Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren sowie das implizite Euler-Verfahren mit fester Schrittweite. Wenden Sie beide Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$u'(t) = 2tu^2(t), \qquad u(0) = 1$$

an. Berechnen Sie eine Näherung für $u(\frac{3}{4})$ unter Verwendung der Schrittweiten $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert. Wie verhält sich der Fehler bei Halbierung der Schrittweite?

Abgabe **Mo 24.06.** und **Di 25.06.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`) in der Wegelerstraße. Ab Mo 17.06. hängt dort eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich alleine oder in 2er Gruppen ein.

Gesamtpunktzahl: 16 + 16 Punkte