Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2013**
Blatt 3 **23.04.2013**

Aufgabe 1: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

Aufgabe 2:

- Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

  um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.

- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.

- Stellen Sie die zu approximierende Funktion f sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

Aufgabe 3: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Wir definieren $w := \tan\beta$ und $w_0 := \tan B$. Damit läßt sich die Differenz schreiben als

$$\begin{aligned} \beta - B &= \arctan\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\tan B\right) - B \\ &= \arctan w - \arctan w_0. \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\arctan(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w - w_0|^2)$.

- Um $w - w_0$ darzustellen entwickeln Sie $f(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.

Aufgabe 4: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.