

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

- Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.
- Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.
- Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5,02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

Aufgabe 2: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0 , $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.

Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.

Aufgabe 3: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die wir auf dem Definitionsbereich numerisch integrieren wollen. Dazu teilen wir das Intervall $[0, 1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ auf und approximieren f auf jedem Teilintervall durch eine affine Funktion.

- Berechnen Sie die Integrale der Lagrangepolynome über die Teilintervalle. (Welche Integrale müssen gleich sein?)
- Bestimmen Sie basierend darauf eine numerische Integrationsformel.

Aufgabe 4: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - x + 1) dx$ einmal direkt und einmal numerisch mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel

$$K_f := \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

wobei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ ist.